



TITLE:

ストレスなしの連続体力学(試論):
運動量の流れを意識して(講義ノート)

AUTHOR(S):

関本, 謙

CITATION:

関本, 謙. ストレスなしの連続体力学(試論): 運動量の流れを意識して
(講義ノート). 物性研究 2010, 95(2): 152-194

ISSUE DATE:

2010-11-05

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/169379>

RIGHT:

講義ノート

ストレスなしの連続体力学（試論）¹ — 運動量の流れを意識して —

パリ第7大学 物理学科 / ESPCI PCT 関本 謙²

(2010年9月30日受理)

初等的な連続体力学を、応力（ストレス）テンソルを極力表に出さず、そのかわり運動量の流れを用いて書き直す。すでに連続体力学を学んだ人、そうして実際に使っている人にも従来とは別の視点を提供できればと思う。

まえがき

本稿は学部3年生への連続体力学（弾性論と流体力学をすこし）の講義ノートをもとに作成した。学部3年生に連続体力学は早すぎるというのが通説だろう。たとえば、ランダウの理論物理学教程のカリキュラムでは媒質中の電磁気などとともに統計力学や量子力学、場の古典論を学んだ後に予定されている。技術的にも、連続体力学にはテンソルやその変換が出てくるし、とりわけ応力テンソルの定義が「面素の向こう側が手前側に及ぼす面積当りの力」という複合的な概念にもとづいていて、なんだか奥歯に物が挟まったようでとっつきにくい。でもとにかく、そういうカリキュラムになっていたのも仕方なく、というのを口実に、別の見方で講義を試みることにした。

その見方というのは、電磁気学について先年旅立たれた今井功氏が著された貴重な本「電磁気学を考える」[1]のアプローチがベースになっている。今井氏は、Maxwell方程式を中心に据えた通常の電磁気学の教科書の体系が、質量、運動量やエネルギーそしてそれらの保存則を中心に展開される力学、流体力学ひいては量子力学の体系化とあまりに乖離しているので、電磁気学も保存則をもとに書き直そうと構想しそれを実現された。標語的に Faraday の視点に立戻ろうといわれている。詳細については是非原著をひもとかれることをお奨めしたい³。まさに「目からウロコ」の本だ⁴。

¹本稿は、編集部の方から特にお願ひして執筆していただいた記事である。

²E-mail: ken.sekimoto@espci.fr ; Homepage: <http://www.pct.espci.fr/~sekimoto>

³一つ例を挙げるなら、通常の電磁 (Maxwell) 応力テンソルに現れる電場と電束密度の積などが、媒質中で「それぞれの」粗視平均の積に因子化できる理由が、縦平均と横断平均（流体力学の知見）を駆使して示される。

⁴できれば奇特な方が英訳を出版されることも望む。

そこで、応力テンソルというややこしいものの現れる連続体力学も、保存則とりわけ運動量のそれを用いて書き直すとどうなるだろう？と試みたのが本稿である。内容の完成度も守備範囲も上記の名著には較べるべくもないものであるが、それでもところどころ「へえ、そうなんだ」とちょっと驚き楽しんでいただければ本望である。もしも運あれば、流体だか固体だかわからない物（ガラス、ゲル、粉流体など）がしばしば議論にのぼる昨今の物理で何かの理解や記述の役に立つかもしれないという楽観的な期待もある。

一言でいうと、応力（ストレス）を使わない連続体力学はなにも無理をするわけではなく、このテンソルを（負号付きの）伝導性運動量流束 (conductive momentum flux) に置き換えるだけである。しかし、こうするととりあえず2つの利点がある。第1に、対流性運動量流束 (convective momentum flux —通常レイノルズ応力と呼ばれる) と対になって、全運動量流束の一部をなし統一性が良くなる。たとえば疎な粉体の流れがある地点から淀んで押し合いへし合いするような状況でも、これらの運動量の観点で考えると見通しがよいかもかもしれない。第2に、応力は力の概念に頼って定義されるのに対し、運動量流束にはそれが無い分、直接的である。下により詳しく述べるが、もしも連続体力学と電気回路網の理論の対応を、運動量が電荷に対応する（いずれも保存量）ように見て行くと、「運動量流束をつかわない連続体力学」は、「電流概念を用いない回路網理論」に対応する。これでは分りにくくても無理ないではないだろうか。運動量流束の概念自体は多くの標準的な連続体力学の教科書に出てくるし、それを元に運動方程式を導くのである。ところがその運動量流束が以降の体系化に使われることは筆者の知る限り稀で、むしろすぐに応力テンソルに追い出されてしまう。勿論それにはそれなりの利点があるのに違いないが一度は運動量にもとづく見方を貫徹してみても如何だろう。もし同意されれば以下の本文をお読みいただきたい。本稿では、古典論（非相対論極限、非量子論極限）に話を限る。また磁場との相互作用についても言及しない⁵。今井氏ご自身が上掲書 [1] を敷衍して力学も含めた、より一般向けの本 [2] も著された。そこで応力状態にも言及されていると聞く。幸か不幸か筆者はその内容を（未だ）知らず、重複するところもあると思うが、本家の今井氏の向こうを張ろうというのではなく、筆者なりに楽しんでみたと思って頂きたい。

この場をお借りして、この原稿に至るまで議論やコメントなどでお世話になった方々に謝辞をのべたい。パリ第7大学の学生には、無謀な講義につきあってもらった。Drazen Zanchi 氏（パリ第7大）には演習を担当してもらった。生物らしいロボットを研究する CREST の小林亮氏（広島大）、黒岩章氏（東北大）およびラボの方々には講義をさせてもらってさまざまなコメントを頂いた。土井正男氏（東京大）とそのラボの方々も同様である。小嶋泉氏（京都大）には武道研究家の甲野善紀氏のお仕事をご紹介いただいたことで、視野が広がった。本稿で引用した論文について、共著者や議論の相手になってもらった同僚である宮本嘉久氏（京都大）、田中良巳氏（はこだて未来大）、大信田丈志氏（鳥取大）、Alain Laverne 氏、Claude Gignoux 氏にも感謝する。日本語原稿作成には京大基研の計算機環境のお世話になった。

⁵相対論的弾性論については、W. パウリの「相対性理論」（ちくま学芸文庫に収蔵）の §45 に言及がある。

目 次

1	離散系のニュートン力学	155
1.1	3つの基本法則	155
1.2	直接の帰結	156
1.3	簡単な例	156
1.4	コメント	157
2	力学回路網の書き直し	158
2.1	準備：作用素としてのスカラー流	158
2.2	力学回路網の法則	159
2.3	直接の帰結	161
2.4	簡単な例	161
2.5	章末のコメント	168
3	連続体力学の書き直し	168
3.1	準備：作用素としてのスカラー及びベクトル密度	168
3.2	質量流束	168
3.3	運動量流束	169
3.4	運動法則	169
3.5	連続体記述での対流性および伝導性の運動量流束	169
3.6	直接の帰結	170
3.7	基本構成関係としての Young の伸長則	170
3.7.1	簡単かつ近似的な例	171
3.7.2	ヤング型伸長への分解: 例. 単純剪断	172
3.8	積分型の運動量保存則	177
4	応用	178
4.1	円筒状の固体の軸回りの回転	178
4.1.1	軸回りに回転する円状物体	178
4.1.2	軸回りに回転する円筒状物体	179
4.2	静止流体の力学	180
4.2.1	静水圧の空間変化	180
4.2.2	アルキメデスの浮力	180
4.3	膜	181
4.3.1	任意形状の閉じた膜の幾何学	181
4.3.2	風船の復元力	182
4.3.3	液滴と液橋	183

4.3.4	内圧を支える円筒状の管	184
4.4	定常流の力学	185
4.4.1	重力下の Poiseuille 型の流れ	185
4.4.2	遅い沈降	188
4.4.3	ゲル中の浸透	189
4.5	ニュートンのゆりかご	190
5	おわりに	192

1 離散系のニュートン力学

厳密な公理的体系を作るのは目的でないし、しようすると混乱してしまうのだが、ニュートン力学の基本法則自体も運動量を前面に出して書き換えを試みる。「運動量＝質量×速度」という公式を忘れて、無定義語と思って読みはじめていただきたい。

1.1 3つの基本法則

(第 I 法則)

運動量はベクトル量で、質量のように常に保存される。

(第 IIa 法則)

相互作用によって系に単位時間あたり $F\hat{u}_F$ (\hat{u}_F は単位ベクトル) の運動量が注入されるとき、力 $F\hat{u}_F$ が働くという。(ベクトル量なので $-F\hat{u}_F$ を吸取られるといっても同じである。)

(第 IIb 法則)

速度ベクトル \vec{v} で動く質量 m は、 $\vec{p} = m\vec{v}$ だけの運動量を貯える。

法則 IIa については漠然と相互作用と書いて曖昧になっているが、静電的、重力的、量子力学的な効果による遠達相互作用が考えられる⁶。相互作用による運動量の移送を**伝導性の運動量の流れ**とよぶ。法則 IIb のように運動量の担体が動くことによる運動量の移送を**対流性の運動量の流れ**とよぶ。法則 IIb はあくまで磁場の無い場合に限って適用される。磁場存在下では正しい対流運動量-速度の関係でないだけでなく、電磁場の担う運動量 (Poynting ベクトル) などこみで保存しなければならない [1]。

⁶これらの効果を相当する場の運動量流によって記述できれば、すべて局所的に書き換えられる。しかしそれには [1] の内容とあまりに重複が増えるので、本稿では述べない。なお Van der Waals 力のような媒質のゆらぎによる力は距離の逆二乗に比例せずかつ本来 2 体相互作用的ではないので保存流としては書き換えられない (と思う)。

1.2 直接の帰結

座標系依存性: 質量に貯えられる運動量は慣性座標系の変更に応じて値を変える。

対生成: 運動量は総和がゼロになるかたちで生成することができる。

孤立系: 力学的に孤立した質点は一定の速度を保つ。

力と加速度: 孤立した質量に力が加わると、質量の貯える運動量が変化、すなわち加速が生じる。

作用・反作用: 第I法則によれば系に注入する運動量は系外のどこから吸取られる。系外には反対符号の注入があるといってもよい。これと第IIa法則をあわせるといわゆるニュートンの第3法則を意味すると思うので、ここでは法則として別記しなかった。

ベクトル性: 移送される運動量はかならずしも、移送の向きを向いていない。反平行のこともあれば、斜行、直交していたりもする。これらは連続体に議論をすすめると登場するだろう。

永久循環: 運動量の流れが物質の運動を引き起こさないとき、流れは永続できる。これを内部 [残留] 応力と呼ぶ。また連続体に議論をすすめると登場するだろう。

1.3 簡単な例

1. 重力下の質点の自由落下。遠達力（重力）は一定率 $\vec{F} = -mg\hat{z}$ で質点に運動量を注入し、これが運動量を介して速度を変える： $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$ 。
2. 点電荷が別の固定電荷から静電相互作用をうけて周回する場合、前者に運動量が注入されつづける。その様子を図1に示す⁷。

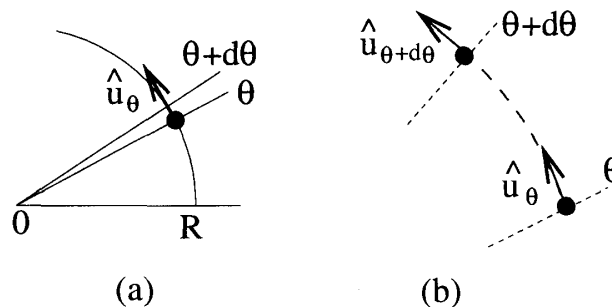


図 1: (a) 半径 R で周回する電荷。速度の単位ベクトル \hat{u}_θ も示す。(b) 角度 θ と $\theta + d\theta$ の間に電荷の質量が貯える運動量は $p_0 \hat{u}_\theta$ から $p_0 \hat{u}_{\theta+d\theta}$ に変る。この差は固定電荷の系から供給される。

⁷ 注入するのは固定電荷を支える何かである。

3. 壁に当る粒子のジェット。互いに相互作用しない粒子のジェットが円錐形をした壁に当る状況 (図 2(a)) でジェットが壁に加える力を知るには、質点が壁に衝突する際に移送する運動量/秒を加えればよい。流体のジェットが平らな壁に当る状況 (図 Fig.2(b)) でも、反跳などがなければジェットの束の断面を通して流れる運動量/秒が壁への力になる。

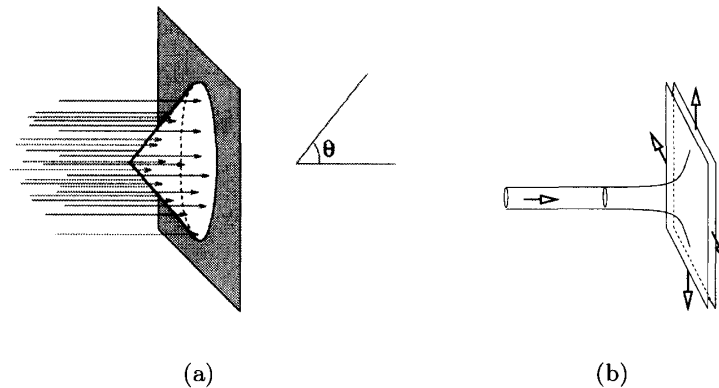


図 2: (a) 相互作用のない粒子のジェット。 (b) 流体のジェット。

4. 物体にあたる粒子のジェット。図 3 のような状況を考えよう。(a) では左右のジェットの運ぶ運動量と、2重円錐型の物体の形状と質量がわかると、後者の運動がわかる。(b) では粒子も円盤も重力を受けるとしよう。図のような初期条件から、円盤はどのように動くだろうか？円盤でなく非対称なものだとどうだろう。

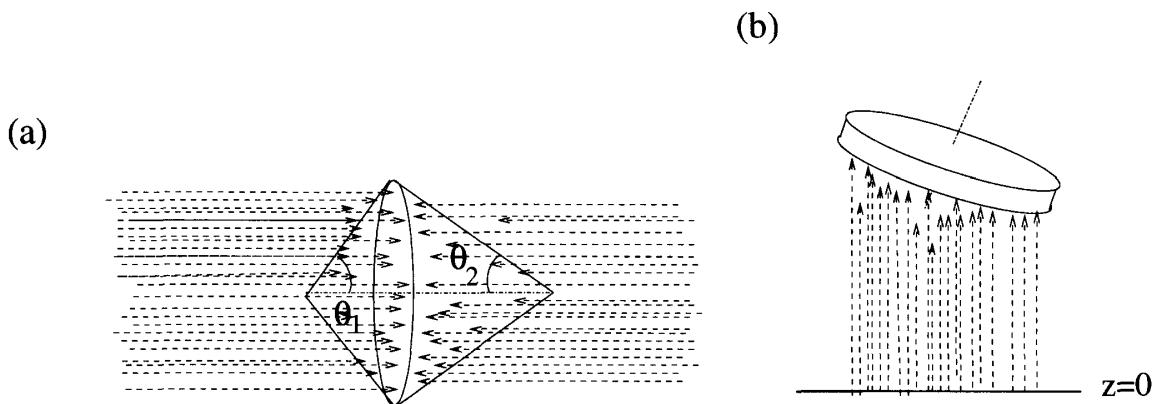


図 3: 粒子のジェットを受ける物体。(a) 重力なし (b) 重力あり

1.4 コメント

[1] では点電荷から電荷に応じた電気力線が伸び、そのそれぞれに（場に依存する）張力を付与する。いずれ張力を運動量の流れとみる立場では、電荷が運動量の湧き出しか吸込みかのように思えそうだが、本稿では全運動量を見るという立場で、保存則一本で通すことにする。たとえば、

十分離れて静止した正負電荷から出発し、そこには運動量の流れも搬送も殆んど無視できるとする。そこからわずかな静電相互作用が両者に反対向きの運動量の注入をしはじめると同時に、両者はその質量に応じて加速されて運動量を蓄積する。そうしてそれぞれの電荷かつ質量は全運動量を産みも消しもしない。別の例として、正負の電荷が (§§ 1.3 の 2. のような固定点まわりでなく) 双子星のように重心のまわりを周回する場合も、静電相互作用で授受する運動量は質量の貯える運動量の変化にそっくり使われる。最後の例として、正負の電荷で引合うイオン対が他の短距離斥力相互作用 (その量子力学的詳細は問わない) との拮抗で一定距離に静止する場合には、静電相互作用の流し込む運動量と斥力相互作用の引き出す運動量がちょうど相殺してある種の運動量循環を形成する。静電相互作用を例にとったが、2 質点の万有引力相互作用でも類似とする。より複雑な状況も上記のようなバランスの組合わせであると考えてみる。

2 力学回路網の書き直し

質点系を主に扱った前章と連続体の扱いの架け橋として、離散的力学要素からなる系を考えてみる。

2.1 準備：作用素としてのスカラー流

流れや流束、密度などは系の状態ではあるが、切口や採取量など測定条件次第で測定結果は変る。そこでこれらの量を (測定条件を与えると観測結果を返す) 作用素とみなす。これは趣味の問題なので、読みとばしてもらってもよい。

いきなりテンソルは戸惑うので、電流や水流のようなスカラー量の流れからはじめる。ある経路にそう流れにそって $\vec{J}^t(s) = J(s) \hat{u}^t(s)$ を定義する⁸。ここで s は適当な基準点から経路にそって測った経路パラメーター。また \hat{u}^t は経路に接する単位ベクトル。 $J(s)$ の符号は \hat{u}^t の向きを逆転すれば変る。

定義：

$\vec{J}^t(s)$ は接線ベクトル $\hat{t}(s)$ に作用してスカラー $\vec{J}^t(s) \cdot \hat{t}(s)$ を返す作用素で、結果は「 $\hat{t}(s)$ の向きへの通過量/秒」を表わす。

たとえば図 4 において、 $\hat{t}(s) = \hat{u}(s)$ なら $\vec{J}^t(s) \cdot \hat{u}(s) = J(s)$ を得るが、 $\hat{t}(s') = (-\hat{u}(s'))$ なら $\vec{J}^t(s') \cdot (-\hat{u}(s')) = -J(s')$ を得る。この流路の両端に電荷のコンデンサーや水のプールがあるとすると、これらに時間当りに流れ込む電荷や水量は、 \vec{J}^t をこれらに向かう単位ベクトルに作用させると得られる。もし結果が負ならば、コンデンサーやプールは湧き出しである。

補足 1: 2 次元、3 次元に広がった流束 (flux) と区別して、経路に沿って集中する場合に流れ (current) という語を用いている。

⁸転置^tを使うのは、反変ベクトルとして共変ベクトル $\hat{t}(s)$ とスカラー積をつくりたいからだだが、面倒なむきは無視されてよい。

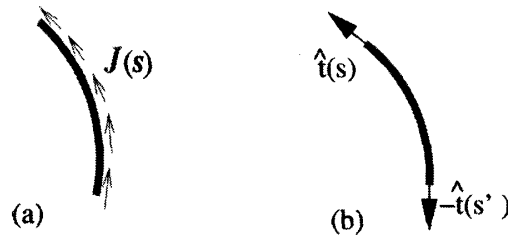


図 4: (a) 流れ $\mathbf{J}^t(s) = J(s)\hat{u}^t(s)$. 矢印は各点での $\hat{u}(s)$ を表わす。(b) この回路からの流れ込みを測りたい向きのベクトル。 $(\hat{t}(s))$ を予め上向きに決めたので、下端では負号がつく。)

補足 2: 後述するように流束 \vec{j}^t が作用する対象は任意の向きの面素ベクトル $\hat{n}A$ でよいのだが、その性質と整合するように「経路に集中した流束」を定義できる:

$$\vec{j}^t(\mathbf{r}) = \int_C J(s') \hat{u}^t(s') \delta_3(\mathbf{r} - \mathbf{R}(s')) ds'. \quad (1)$$

ここで $\mathbf{R}(s')$ は経路 C 上のパラメータ s' にあたる位置ベクトル、 δ_3 は 3 次元のデルタ関数。この流束 $\vec{j}^t(\mathbf{r})$ をパラメータ s での任意向きの面素 $\hat{n}A_s$ に作用させると

$$\int_{A_s} \vec{j}^t(\mathbf{r}) \cdot \hat{n} dA = \int_C J(s') \left[\int_{A_s} \delta_3(\mathbf{r} - \mathbf{R}(s')) (\hat{u}^t(s') \cdot \hat{n}) dA \right] ds' \quad (2)$$

となり、 $[\]$ 内の積分が $\pm\delta(s' - s)$ を与えるので（当たり前だが）結果は面素の傾きによらない $\pm J(s)$ を得る⁹。

2.2 力学回路網の法則

スカラー量の流れに馴染んだあとで、ベクトル量の流れを導入する。さしあたり真っ直ぐな流路を考える（図 5）。太さと質量を無視できる棒が手を押す力を（伝導性の）運動量の流れの立場で表わしたい¹⁰。スカラー保存量の流れの扱いを拡張し、運動量（＝ベクトル性の保存量）の流れも作用素 G とみなし、これが接線ベクトル \hat{n} に作用して、その点を通して移送される運動量/秒 $G \cdot \hat{n}$ を値として返すようにしたい。

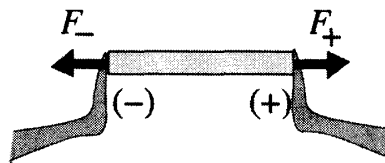


図 5: 棒の両端を手で押す時、手に向かって流れ込む運動量/秒は矢印の向きをもつベクトル F_{\pm} である。

⁹符号 \pm は $(\hat{u}^t(s) \cdot \hat{n}) > 0, < 0$ に応じてとる。

¹⁰棒を離散力学的にイメージするなら相互作用する要素の網目で、これが [対流性の運動量を貯めこまずに] 運動量を遅れなしに受け渡すといったところか。

運動量流 G の定義（前半） 図 6 参照。

- (1.) 曲げや振りのトルクのない棒に沿う運動量流は次のかたちをとる: $G = P \hat{u} \hat{u}^t$. ここに \hat{u} は棒の単位接ベクトル。加速しない棒に沿っては G は均一である。
- (2.) 出口においては、出る向きの単位接ベクトルを $\hat{n}^{(\text{out})}$ とすると、流れ出る運動量/秒は、 $G \cdot \hat{n}^{(\text{out})}$ とかける。

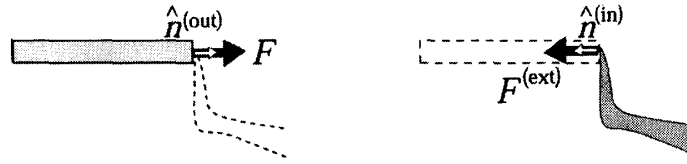


図 6: 左: 定義 2. の説明。右: 外からみたときの運動量流。

定義により、棒が外に働きかける力は $\vec{F} = G \cdot \hat{n}^{(\text{out})} = P \hat{n}^{(\text{out})}$ 。逆に、外から力 $\vec{F}^{(\text{ext})}$ が棒の端点に加わる状況 (図の (b)) をわれわれは運動量の流れ込みと考えるのであるが、その場合は棒内の運動量流を決める条件は $G \cdot \hat{n}^{(\text{in})} = P \hat{n}^{(\text{in})} = \vec{F}^{(\text{ext})}$ となる。ここで外が働きかける対象は棒の内なので、 $\hat{n}^{(\text{in})}$ は図のように棒の内を向く。

曲げや振りのトルクを除外したことは障害ではない。網目を組めばそこを流れる運動量の様子がこれらを特徴づけるはずだ (下記の「Warren のトラス」)。質量をもつ棒も質量のない微少な棒と微少な質量の質点を交互に並べたものを考えればよい (下記の「剛体棒の加速」)。

運動量流 G の定義（後半） 図 7 参照。

棒が自由な結節点で結ばれている場合。それぞれの棒の接線ベクトルを $\hat{u}^{(\alpha)}$ ($\alpha = 1, \dots, n$) とし、棒内での運動量流を $G^{(\alpha)} = P^{(\alpha)} \hat{u}^{(\alpha)} \hat{u}^{(\alpha)t}$ とすると、質量をもたない結節点での運動量保存は¹¹

$$0 = \sum_{\alpha=1}^n G^{(\alpha)} \cdot \hat{n}^{(\alpha)} = \sum_{\alpha=1}^n P^{(\alpha)} \hat{n}^{(\alpha)} \quad (3)$$

とかける。ここではすべての $\hat{n}^{(\alpha)}$ を結節点に向くようにさだめる。¹²

質量をもつ結節点の場合にはその貯える運動量 p も含めて保存するよう修正される:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_{\alpha=1}^n G^{(\alpha)} \cdot \hat{n}^{(\alpha)}. \quad (4)$$

¹¹cf. 電荷と電流についての Kirchhoff's law に準ずる。

¹² G の定義の $\hat{u}^{(\alpha)}$ の向きまで直す必要はない。すぐ下に述べるように G はこの操作で不変だから。

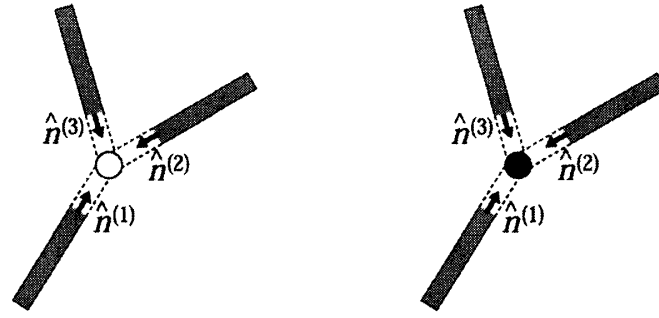


図 7: 左: 質量のない結節点。右: 質量をもつ結節点。

2.3 直接の帰結

1. 交換 $\hat{u} \rightarrow (-\hat{u})$ に関して G は不変である。
2. G はテンソルとして対称である, $G = G^t$.
3. 棒が圧縮されているとき、 $P > 0$, 引張られているとき $P < 0$ である。
4. 棒は伸び縮みしてよい。
5. 作用素として G は棒の単位接線ベクトルにのみ作用する。しかし、その結果はベクトルなので、その任意の成分を抽出することは許される。たとえば、勝手な単位ベクトル \hat{e} を使って作用素 $\hat{e}^t \cdot G$ は運動量流の \hat{e} 方向成分を与える。

電磁気学ないし電気回路網との対比 力学回路は電気回路と十分似ているだろう。ここで一応の対応づけを試みる¹³。

<u>電磁気学ないし電気回路網理論</u>	\leftrightarrow	<u>連続体力学ないし力学回路網理論</u>
電荷	\leftrightarrow	運動量
電荷の保存	\leftrightarrow	運動量の保存
充放電のレート	\leftrightarrow	力
電流密度ないし電流	\leftrightarrow	運動量流束ないし運動量流

(5)

既にイントロで述べたように運動量の流れをまともの扱わないのは、電流を禁句にした回路網理論のようで、窮屈であろう。

2.4 簡単な例

Hooke のバネ いわゆる線形バネのバネ定数を k , 自然長からの伸びを $\Delta\ell$ と書こう。バネに沿って運動量流は一様で、

$$G = (-k\Delta\ell) \hat{u}\hat{u}^t \quad (6)$$

¹³力の位置づけは [1] にも明記されている (2 章 §4)。ただ入門書 [2] では力の位置づけがはっきりしなかったという読者の感想を伺った。

で与えられる。ここで \hat{u} はバネの方向に沿う単位ベクトル。

剛体棒の加速 太さも伸縮も無視できるが重さのある長さ L の棒を、その一端から x_0 の距離のところをつかんで棒に沿って加速する。棒の質量密度を ρ_1 、加速度を \vec{a} とするとき、位置 x での運動量流を求めよう。(運動量流からいわゆる張力/圧力が P の値として得られる。) \vec{a} に関して前[後]の端を $x = 0[L]$ と約束しよう。各線素 dx の質量 $\rho_1 dx$ に $(\rho_1 dx)\vec{a}$ /秒の運動量を分配するため、つかんだ点から運動量を注入せねばならない。点 $x(> x_0)$ では、それより前方のすべての質量 $\rho_1(L-x)$ に供給する運動量(総計 $\rho_1(L-x)\vec{a}$ /秒)を流してやらねばならないので、

$$\mathbf{G} \cdot \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} = \rho_1(L-x)\vec{a}, \quad (7)$$

が要求される。同様に点 $x(< x_0)$ では、それより後方のすべての質量 $\rho_1 x$ に総計 $\rho_1 x\vec{a}$ /秒を流してやらねばならないので、

$$\mathbf{G} \cdot \left(-\frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} \right) = \rho_1 x\vec{a} \quad (8)$$

が条件になる。作用する単位ベクトルに負号がつくのは、後端に向けて流す量を測るからである。上のそれぞれを定義 $\mathbf{G} = P\hat{u}\hat{u}^t$ と対照して、

$$P = \begin{cases} -\rho_1 x \|\vec{a}\|, & (0 \leq x < x_0), \\ \rho_1(L-x) \|\vec{a}\|, & (x_0 < x \leq L) \end{cases} \quad (9)$$

定性的には、つかんでいる点の前後で圧力(前方)と張力(後方)が最大になり、両端ではゼロとなる。(棒に乗って考えることは出来ない。非慣性系だから。)ご覧のように導出過程では力を使っていない。

Warren のトラス構造 図 26(a) のようなものを Warren のトラスと呼ぶらしい。簡単のため、斜めの辺は $\pm 45^\circ$ の傾きとする。また紙面の 2 次元に限り、辺は質量も伸縮も無視できる棒、頂点は質量を無視できる自由なジョイントとする。点 P に真下向け(左の壁に平行)に単位の力を加えるとき、トラス各要素での力学状態を知りたい。また、壁は A と B でどのような力を受けるだろうか。

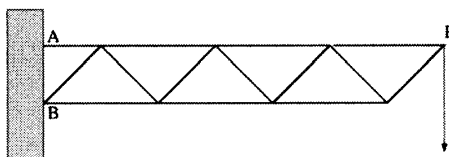


図 8: “Warren Truss”

運動量流の見方では、まず縦成分の運動量 $\hat{z}^t \cdot \mathbf{G}$ について図 9 の上半分のように斜辺に沿う流れを決めてしまう。水平な辺は縦成分を全く運べないからである。

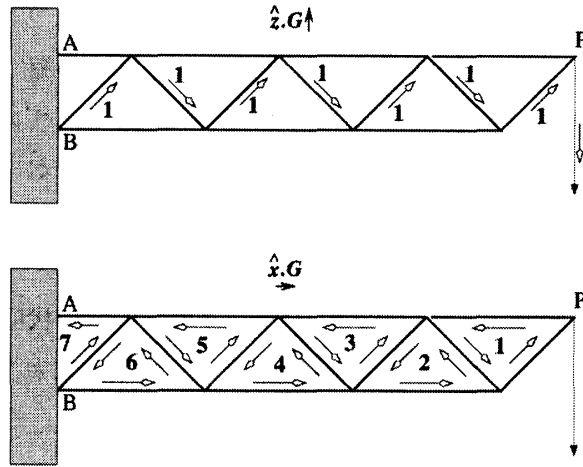


図 9: 縦 (z) 成分の運動量流（上図）と横 (x) 成分の運動量流（下図）。

これで斜辺の力学的状態が、縦成分のみならず横成分も決まる。何故なら各辺の G のパラメータは 1 つだけだから。右上りの斜辺には圧力が、右下りの斜辺には張力が加わっていることもわかる¹⁴。

次に、この結果も使って次に横成分の流れを解く。その際、各斜辺の（横成分の）流れを一部相殺するかたちで 2 つにわけると、同図の下半分のように、端点 P 側からはじめて、徐々に増加する運動量流の循環が生じていることがわかる。図中の水平な棒に与えられたベクトルの向き（矢印）と大きさ（数字）から、上辺は張力、下辺は圧力がくわわっていることがわかる。結果として下向き成分の運動量は壁に向かって流れ、それに加えて水平成分の運動量の「渦層」が壁に近づくにつれ大きくなっている。最後に壁に加わる力が求まり¹⁵、「てこ」の原理の要領で求めるのと合致することがわかる。下向の荷重は B にて支えられる。意外と面白いと思われた方は、図 10 の配置について同様の手順を試されてはどうだろう¹⁶。通常の連続体力学では荷重によって曲げられた棒の垂直断面における剪断力が棒内の曲げモーメントの空間勾配をつくる [3]。本稿の場合トラスの任意断面を通る運動量の解析からもこれらの量が求まる。曲げモーメントと運動量の循環については最終章でもう少しのべる。

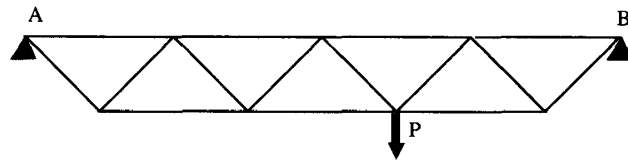


図 10: “Warren truss”. A と B はトルクのない固定点。

¹⁴ $G = P\hat{u}\hat{u}^t$ とおくと、斜辺の方向によって、 $G^{(\alpha)} = \sqrt{2}\hat{u}\hat{u}^t$ （右上り： $\hat{u}^t = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ ）および $G^{(\alpha)} = -\sqrt{2}\hat{v}\hat{v}^t$ （右下り： $\hat{v}^t = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ ）となる。

¹⁵たとえば点 A については、図から $\hat{x}^t \cdot G = -7\hat{x}$ を読み取り、壁に向かう単位ベクトル $(-\hat{x})$ に作用させて 7 を得る。 z 成分の流れ込みはないから、 $G \cdot (-\hat{x}) = 7\hat{x}$ ということである。これが A に加わる力の大きさと向きである。

¹⁶今度は荷重点から順次決めるわけにゆかないが、適当な配分を仮定すると最後に決定条件が見つかる。

運動量流の永久循環としての内部 [残留] 応力¹⁷ 図 2.4(a) のような 2 次元の構造を考えよう。水平は棒と垂直な棒は相互作用していないとする。また 6 つの辺の伸縮はいずれも無視できるとする。簡単のため斜辺は $\pm 30^\circ$ 水平から傾いているとする。孤立系としての定常条件は 4 頂点でのいわゆる力の釣り合い、あるいは運動量流の保存条件では完全に決まらない (hyperstatic な拘束)。任意の一边を除去すると、唯一可能な状態はすべての運動量流がゼロであるが、ここに 6 番目の辺を戻すときにどのような運動量流を内部に引き起こすか、1 つパラメータが導入される。

例として、垂直な棒の運動量流 $G = P \hat{z} \hat{z}^t$ を $P = 1$ (単位の圧縮状態) とすると、垂直成分の流れは (左右対称性もつかって) 図 11(b) の上図のように決まり、これで斜辺の運動量流がわかったので同下図のように水平な棒の運動量流 (張力になる) も決まる。それぞれの成分で異なる双子の循環が生じている。

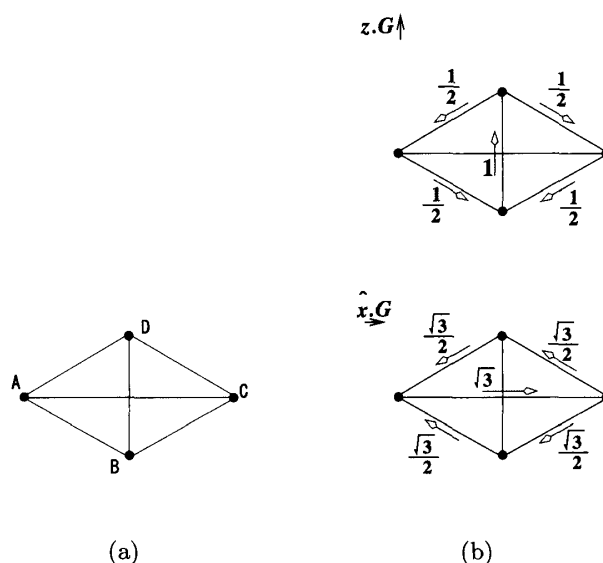


図 11: (a) Hyperstatic な系 (b) 内部 [残留] 応力に対応する運動量流の例。運動量の成分に分けて表示している。

建築家 Buckminster-Fuller の tensegrity や、多くの楽器なども、張力と圧力 (及び以下に見るように剪断力) をあえて作ることで目的の機能や動作を実現する。実験のセットアップなども「遊び」を抑えたいときや、一部に圧力や張力を集中したいときは、全体として運動量の循環を無意識に設計しているのではないだろうか。

輪ゴムの "hoop stress" 輪ゴムが茶筒のような円筒の回りに巻付いているという状況を運動量流の見方で解析しよう (図 12)。ゴム中の各微小素片 (棒とみなせる) は張力状態 $P = -T (< 0)$ にあるとしよう。その運動量流はしたがって、

$$G_\theta = -T \hat{u}_\theta \hat{u}_\theta^t. \quad (10)$$

¹⁷ 「残留応力」という呼称がよりしばしば使われるようだが、筆者としては操作的なこの語よりはサブ尺度階層の応力というニュアンスの「内部応力」を使いたい。

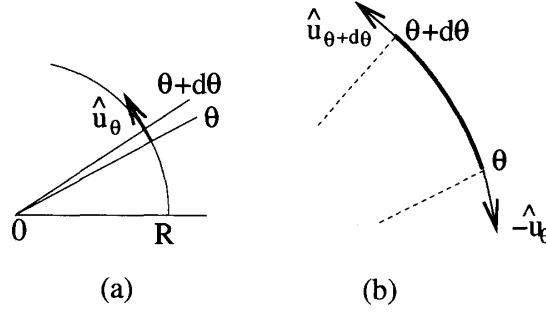


図 12: (a) 角度と接線ベクトルの定義。 R は円筒の半径。(b) 角度 θ と $\theta + d\theta$ の間の輪ゴム素片。いわゆる張力を T とする (i.e. $P = -T$). 下端は $-T\hat{u}_\theta$ で引かれ、上端は $T\hat{u}_{\theta+d\theta}$ で引かれる。

この素片から流出する総運動量/秒はなにか別の源からの注入運動量/秒、 $d\vec{H}$, によって補償されている。

$$G_\theta \cdot (-\hat{u}_\theta) + G_{\theta+d\theta} \cdot \hat{u}_{\theta+d\theta} = T\hat{u}_\theta - T\hat{u}_{\theta+d\theta} = d\vec{H}. \quad (11)$$

他方、幾何学により、

$$\hat{u}_{\theta+d\theta} - \hat{u}_\theta = \frac{\hat{u}_\theta}{d\theta} d\theta = -\hat{r}_\theta d\theta, \quad (12)$$

と

$$d\theta = \frac{ds}{R}, \quad (13)$$

の関係がある。ここで \hat{r}_θ は θ の向きを向く単位動径ベクトル、 ds はこの素片の経路長。

以上3式をまとめると、次式を得る：

$$d\vec{H} = T\hat{r}_\theta d\theta = \frac{T}{R}\hat{r}_\theta ds. \quad (14)$$

これがいわゆる円筒が輪ゴムの素片 ds を押し拡げる力/経路長である。輪ゴムが円筒を締めようとする力（円筒に注入する運動量/秒）はこれに負符号をつけたもので、“hoop stress”ともいわれる。

ノート：輪ゴムの状況（図 12）と中心力で回る質点の状況（図 1）の類似は偶然ではない。前者は伝導型運動量の回流であるのに対し、後者は対流型（質量の運ぶ）運動量の回流だからだ。いずれの場合も運動量保存は動径方向の運動量注入を（外向なり内向なり）必要とする。ちなみに質点が回る場合の軌道上の（1次元）運動量流は次のように書ける：

$$G(s) = m\vec{v}(t)[\vec{v}(t)]^t \delta(s - s_m(t)). \quad (15)$$

ここで $s_m(t)$ は時刻 t での軌道上での粒子の位置を表わす¹⁸。このように、運動量流の立場でみれば以外と近い現象があるのではないだろうか。

¹⁸式 (15) を確かめるには、軌道上のある固定点で観測して、粒子の通過が正しい運動量流を与えるかを調べれば良い。実際、通過時刻を t_0 として、その前後にわたっての $G(s) \cdot \hat{u}(s)$ の時間積分は $\int G(s) \cdot \hat{u}(s) dt = m\vec{v}(t_0)$ を与える。ここで関係式 $\vec{v}^t(t)\delta(s - s_m(t)) = \frac{\vec{v}^t(t)}{|\vec{v}(t)|}\delta(t - t_0) = \hat{u}^t(s)\delta(t - t_0)$ を使った。

1次元バネ・ビーズ系の「尺取虫運動」 剛体棒の途中をつかんで前向きに加速すれば、前向き運動量が後向きに流れる箇所があることを上に見た。ここではさらに「棒」の弾性を考慮してよりダイナミックな状況を見て見よう。少し長いので、面倒ならとばして次へ。

— **モデル**：図 13 のように質点と Hooke バネが交互につながった 1 次元系を考える。両端は自由端で、基準状態は静止したバネも自然長の状態とする。 n 番目の質点の変位はこの基準状態からの変位 $u_n(t)$ で表わす¹⁹。質点の対 “ $(n, n+1)$ ” をつなぐバネの伸びは

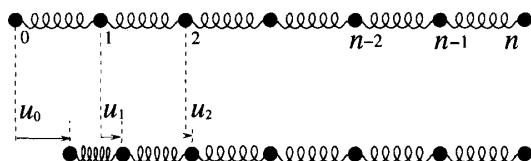


図 13: 質点とバネからなる鎖。基準状態（上図）と変形状態（下図）。

$$\Delta \ell_{(n,n+1)} = x_{n+1} - x_n - \ell_0 = u_{n+1} - u_n = \ell_0 \frac{u_{n+1} - u_n}{\ell_0} \simeq \frac{\partial u}{\partial n}. \quad (16)$$

変位は n について緩やかに変化するという近似を採用する。伝導性の 運動量流 G_{cond} は (cf. (6))

$$G_{\text{cond}} \simeq -k \frac{\partial u}{\partial n} \hat{x} \hat{x}^t \quad (17)$$

と書ける。次に運動の基本法則を質点に関して書くと、

$$\frac{d\vec{p}_n}{dt} = G_{\text{cond};(n-1,n)} \cdot \hat{x} + G_{\text{cond};(n,n+1)} \cdot (-\hat{x}) \simeq -\frac{\partial(G_{\text{cond}} \cdot \hat{x})}{\partial n} \quad (18)$$

となる。これは、伝導性の運動量流が対流性の運動量流に転換（またその逆）する関係とみることが出来る。第 IIb 法則, $\vec{p}_n = m \frac{\partial u}{\partial t} \hat{x}$, も用いて、いわゆる波動方程式 $m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \simeq k \frac{\partial^2 u}{\partial n^2}$ を得る。以下では時間や質量の単位を $m = k = 1$ となるようにとる。そこで運動方程式は

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial n^2}. \quad (19)$$

— **運動の解**：よく知られているように一般解は

$$u(n, t) = \phi(t - n) + \psi(t + n) \quad (20)$$

と書ける。初期条件として、 $t < 0$ まで基準状態にあった系に $t = 0$ において左端の質点にほぼステップ関数的な変位あたえる。反射成分がまだない $t \ll 1$ では $u(n = 0, t) = \phi_0(t)$ と書ける。ここで（ほぼ）階段関数 $\phi_0(t)$ は $t < 0$ で 0、 $t > \Delta t$ （ただし $\Delta t \ll 1$ ）で $d(> 0)$ の値をとると定義する。 $t = \Delta t$ 以降の全時刻で自由境界条件（左端 $n = 0$, 右端 $n = L$ ）を設定する。自由境界を通過して運動量は流れないので、

$$G_{\text{cond}}(-\hat{x})|_{n=0} = G_{\text{cond}}\hat{x}|_{n=L} = \vec{0}, \quad (21)$$

¹⁹ $u_n = x_n - n\ell_0$. ここで ℓ_0 は自然長。

したがって、 $\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{n=0} = \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{n=L} = 0$ となる。これらの条件を満たす解は上に導入した階段関数を使って次のように書ける。

$$u(n, t) = \phi_0(t - n) + [\phi_0(t + n - 2L) + \phi_0(t - n - 2L)] + [\phi_0(t + n - 4L) + \phi_0(t - n - 4L)] + \dots \quad (22)$$

ここで $\phi_0(s)$ は上で定義した 1 段の階段関数である。伸長パルスが後向きに通過する毎に一段ずつ前進する。この様子を $L = 10$ の場合に図 14 に示す。

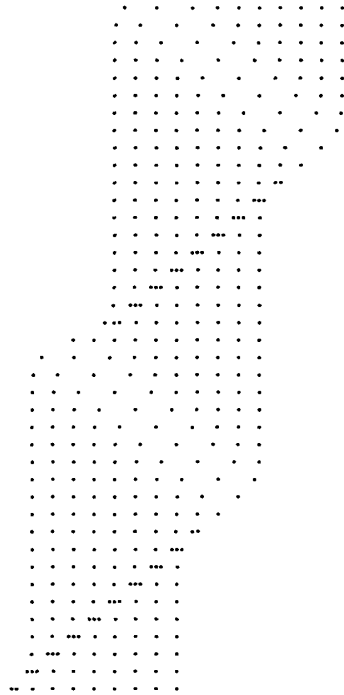


図 14: 横軸を空間、上向き縦軸を時間方向に、各質点の位置を一定時間毎に表わす。どの質点も決して後退はしないので、対流性運動量流は符号を変えないのは見て明らか。伝導性運動量流は圧縮パルスと伸長パルスでは符号を変える。(しかしこの事とパルスの伝搬方向とは混同すべきではない。)

— 運動量流の解析：

[運動量] 全運動量は $t > \Delta t$ でずっと保存する。重心は等速で前進する。運動量を貯えるのは質点で、パルス領域以外ではほぼゼロ（静止）である。貯蔵運動量のパルスは前進も後退もすることが見て取れる。しかし対流性の運動量流が符号を変えるわけではない。実際、 $(\hat{x}^t \cdot \mathbf{G}_{\text{conv}})$ は常に（ゼロないし） $+\hat{x}$ の向きを向く。

[運動量流] とりわけ伝導性の運動量流をみてみよう。これはバネを介して流れる。これが符号を変えことは $(\hat{x}^t \cdot \mathbf{G}_{\text{cond}}) = -\frac{\partial u}{\partial n} \hat{x}^t$ からわかる。実際、圧縮パルス $\partial u / \partial n < 0$ のもとでは右向きで、伸長パルス $\partial u / \partial n > 0$ のもとでは左向きである。

2.5 章末のコメント

質点系や力学回路網についてあまりにくどかったかもしれない。すべて連続体記述から極限的に導くという考えもあるだろう。けれども、粉粒体やメソスコピックな系、ひいてはアトム的な系まで直接観察・直接制御の対象となってきた今日、離散的な記述もそれ自体使えるかもしれない。

3 連続体力学の書き直し

既に述べた作用素としての見方を連続体に適用するところからはじめる。

3.1 準備：作用素としてのスカラー及びベクトル密度

質量密度や電荷密度はスカラーの密度である。これらを微少体積に作用して、その中にある質量や電荷を返す（線形）作用素とみなす。たとえば質量密度 ρ に体積要素 dV を作用させると質量 dm が得られることを、

$$\rho : dV \mapsto dm = \rho dV \quad (23)$$

と書く。静水圧は面要素に作用して、働く力（運動量の注入/秒）を与える。これは $p : \hat{n} dS \mapsto dF_p = p \hat{n} dS$ と書いてよいだろう。重力の効果はベクトル性の線形作用素とみてよく、体積要素に作用するなら、質量密度との積作用素をつくって、 $\vec{g} \circ \rho : dV \mapsto d\vec{F}_g = (\vec{g}\rho)dV$ と表せよう。この他、量子力学の確率密度、気体論のエネルギー密度など、単に見方をすこし変えたというだけである。この調子で 流れ の 密度 も作用素とみなそう。

3.2 質量流束

まずスカラー保存量の流束から。

定義 (図 15 を参照) 質量流束 \vec{j}^t はベクトル性の線形作用素で、面要素 $\hat{n} dS$ に作用してその面要素の向きに通過する質量/秒を $\vec{j}^t \cdot \hat{n} dS$ として与える。

本稿では流れと流束の区別をしているが、次元についてこれらの対比をしておく。 Λ を 質量、電

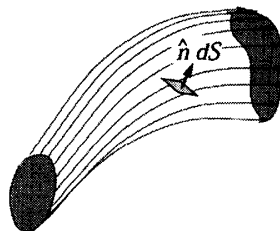


図 15: 面素片 $\hat{n} dS$ を通過する質量流束とその周辺。

荷、エネルギーのような保存量とするととき、
流れについては²⁰、

$$[\text{current of } \Lambda] = \frac{[\Lambda]}{[\text{time}]} = [\text{rate of passing of } \Lambda] \quad (24)$$

流束については²¹、

$$[\text{flux of } \Lambda] = \frac{[\text{current of } \Lambda]}{[\text{area}]} = \frac{[\Lambda]}{[\text{time}] [\text{area}]} = \frac{[\Lambda] [\text{velocity}]}{[\text{volume}]} = [\text{density of } \Lambda] [\text{velocity}]. \quad (25)$$

3.3 運動量流束

テンソル性である運動量流束も考え方は質量流束と同じである。

定義： 運動量流束 \mathcal{G} は面要素 $\hat{n}dS$ に作用するテンソル性の作用素で、この面要素の向きに流れる運動量/秒を $\mathcal{G} \cdot \hat{n}dS$ で与える。

もういちど運動量に特化して次元の関係をまとめておく。力の位置づけにも留意されたい。

$$[\text{momentum current}] = \frac{[\text{momentum}]}{[\text{time}]} = [\text{force}] = [\text{passing rate of momentum}] \quad (26)$$

$$\begin{aligned} [\text{flux of momentum}] &= \frac{[\text{momentum current}]}{[\text{area}]} = \frac{[\text{momentum}]}{[\text{time}] [\text{area}]} = \frac{[\text{force}]}{[\text{area}]} \\ &= \frac{[\text{momentum}] [\text{velocity}]}{[\text{volume}]} = [\text{momentum density}] [\text{velocity}] \end{aligned} \quad (27)$$

3.4 運動法則

3つの基本法則については既に述べたものにおいて「系」を微少体積 dV とその質量 ρdV をもつものと読み替えればそのままでよい。

3.5 連続体記述での対流性および伝導性の運動量流束

対流性の運動量流束： 運動量の密度はベクトル量でその流束はテンソル量である：

$$(\text{運動量密度}) = \rho \vec{v}, \quad (28)$$

$$(\text{運動量流束}) = (\mathcal{G})_{\text{conv.}} = \rho \vec{v} \vec{v}^t, \quad (29)$$

ここに ρ は質量密度で、 \vec{v} は質量平均の（局所重心）速度である。

²⁰ 次の事に注意： $[\text{current of } \Lambda] \neq [\Lambda] [\text{velocity}]$.

²¹ 非圧縮に限って $\Lambda = [\text{volume}]$ とすると $[\text{flux of } \Lambda] = [\text{velocity}]$.

伝導性の運動量流束： 対流性でない運動量流束の部分を伝導性の運動量流束と呼ぶ。これとい
わゆる応力（ストレス）テンソルとの関係は

$$(\mathcal{G})_{\text{cond.}} = -\sigma \quad (30)$$

である。

3.6 直接の帰結

既述のように運動量はベクトル量であるためにさまざまな方向に対発生対消滅できる。いくつ
か具体例を挙げる。

静水圧の発生 粒子を容器に粗に詰めて放置すると（重力は無視する）、反平行な速度をもつ2粒
子の衝突でも、正面衝突しない限り衝突前とは違った方向の運動量を対発生する。これを繰
り返していったついに詳細釣り合いの定常状態に達すると、運動量流束が等方的になる。これ
を静水圧の状態と考えられよう²²。以下ではこの平衡化を「圧力の等方化効果」と呼ぶこと
にする。

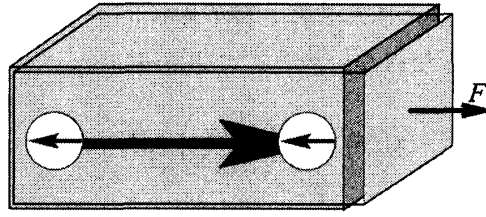
熱ゆらぎ 流体や弾性体の内部で自発的に質量、運動量、エネルギーの遍在が起る。局所加熱的な
エネルギー集中では膨張による等方圧力の増加をもたらすだろうが、異方的な運動量対の発
生もあり得て、（隣接反対電荷が2重極を生じるように）隣接反平行な運動量ベクトルが4
重極（テンソル場）を生じる。弾塑性体の局所変形などで可視化されることがある。メソ尺
度の物体が中にあるとこの自発的運動量の流れが注入されて Brown 運動を引き起こす²³。

記述の尺度変更による生成消滅 塩の結晶では原子的尺度の正負の電荷は局所的に相殺されていて、
分極を誘起しない限りマクロには見えない。同様に運動量についても、原子尺度から様々
な尺度に至って運動量流束の局所的な循環は通常外に見えない。変形や流動をくわえるとそ
のバランスからのずれ分だけがマクロに観測されるとも言えるだろう。残留応力の操作につ
いては後章でふたたびのべる。

3.7 基本構成関係としての Young の伸長則

運動量の流れの観点では弾性体の変形のうちで Young の伸長条件 —側面を自由にして1軸に引
張る／圧縮する—が最も基本的である。なぜならこの条件においては唯一の方向の運動量が唯一
の方向に流れるから。引張り方向を \hat{u} としよう。この方向の自然長 L_0 が L に伸ばされたときの
伸長比を $\epsilon = (L - L_0)/L_0$ と書く。Young の伸長則はこの際の張力/垂直断面積 t が Young 率 E
を使って $t = E\epsilon$ と書けるという。これは運動量流束を使えば次のように表現される。

$$\mathcal{G} = -t \hat{u} \hat{u}^t = -E \epsilon \hat{u} \hat{u}^t \quad (\text{Young's type elongation}). \quad (31)$$



(Setup of Young's type elongation)

図 16: Young の伸長条件 $\mathcal{G} = -t\hat{x}\hat{x}^t$ の解釈。左向き運動量 (円内の矢印) が右向きに流れる (太い矢印) あるいはその逆。

図 16 において、右側面に測定器を固定し、左側面を誰かが引張ったとすると、後者は左向きの運動量を注入し、それは右へ流れて、測定器にこの運動量を与える。立場を入れ替えると、右から右向き運動量を左へ流すと言い換えることもできる。変形を主に考えていると、Young の伸長条件は Poisson 比 ν に応じた横変形（後述）を伴っていてややこしく思えるが、運動量を主に考えるなら、側面からの他の運動量の出入りのない最も基本的な設定になっている²⁴。

3.7.1 簡単かつ近似的な例

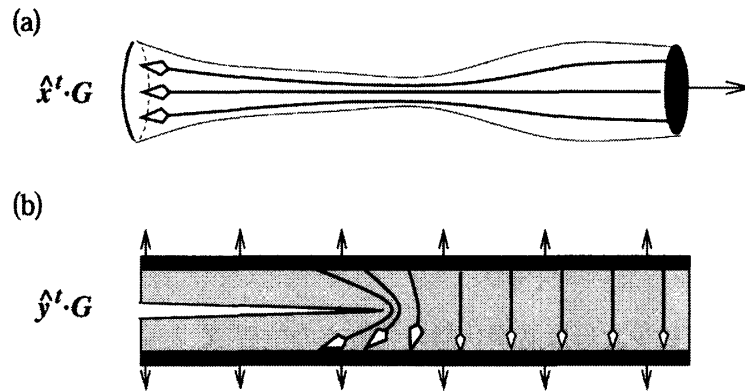


図 17: (a) $\parallel \hat{x}$ 方向に伸長された棒中の \hat{x} 成分の運動量の流れ。(b) $\parallel \hat{y}$ 方向に伸長された板中の \hat{y} 成分の運動量の流れ。亀裂先端近傍での流れの迂回が「応力集中」に対応する。

運動量流束の集中と拡散 太さが緩やかに不均一な棒を引張ると (図 17(a))、(伝導性) 運動量流束は近似的に

$$\mathcal{G} \simeq -t(x)\hat{x}\hat{x}^t \quad (32)$$

²²密に詰まった粉体では履歴をもつ。Force-line の網目は運動量の通り道を表す。

²³Langevin 方程式は Brown 粒子の立場で運動量注入のバランスを表現している。

²⁴どこまで類推があるかわからないが、量子論の密度行列なら「純粋状態」というところ。

とかけるだろう。運動量の保存を満たすために、棒の軸に向かう運動量流（断面積にわたる積分） T_{tot} は軸に沿って一様でなければならない。このことから、

$$\mathcal{G}(x) \simeq -\left(\frac{T_{\text{tot}}}{S(x)}\right) \hat{x} \hat{x}^t. \quad (33)$$

ここに $S(x)$ は軸上の場所 x での断面積である。細いところが切れやすいことは多くの運動量を流すために構成要素が強く引張られるから、といえる。

図 17(b) では、亀裂先端が亀裂面に垂直な引張りに際して運動量流束の集中をうける事を模式的に描いている。

図 18 は教科書的な例だが、Young の伸長条件下で引張り軸と θ の角をなす面素片 $\hat{n}S$ への運動量注入 $\mathcal{G} \cdot \hat{n}dS = -t\hat{u}(\hat{u} \cdot \hat{n})S$ がゼロ角の場合に較べて余弦 $(\hat{u} \cdot \hat{n})$ の分だけ薄まることを示す。流れる運動量はあいかわらず引張り軸を向いているので、面の方向 \hat{n} の成分に射影すると更に余弦分小さくなる： $\hat{n}^t \cdot \mathcal{G} \cdot \hat{n}S = -t|\hat{u}^t \cdot \hat{n}|^2 S$ 。他方、面に沿う射影（すなわち剪断成分）は $\hat{n}_\perp^t \cdot \mathcal{G} \cdot \hat{n}S = -t(\hat{u}^t \cdot \hat{n}_\perp)(\hat{u}^t \cdot \hat{n})S$ となって $|\theta| = \pi/4$ 最大値をとる。（この例では線形近似以外の近似は使っていない。）

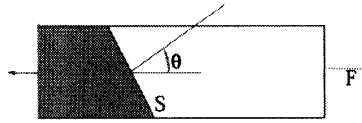


図 18: Young の伸長下にある物体（矩形）とその力学状態の観測

3.7.2 ヤング型伸長への分解: 例. 単純剪断

式が多いわりには内容はないのでお急ぎのむきは (52) の下へ飛ばれよ。

一般の微少変形 一般の微少変形は基準状態の物質点の位置 \mathbf{X} と変形後のそれ \mathbf{X}' との線形関係であらわされる。 $\mathbf{X} = \mathbf{0}$ を不動点になるよう全体の並進を除去すると、(回転を含む) 変形を表すテンソル \mathbf{M} をつかって

$$\mathbf{M} : \vec{\mathbf{X}} \mapsto \vec{\mathbf{X}}' = \mathbf{M} \vec{\mathbf{X}}.$$

となり、微少さは $\mathbf{M} \simeq \mathbf{1}$ と書かれる。そこで変位場を

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}) \equiv \mathbf{X}' - \mathbf{X} = (\mathbf{M} - \mathbf{1}) \cdot \mathbf{X} \quad (34)$$

で表すと、 \mathbf{M} は

$$\nabla \mathbf{u} = \mathbf{M} - \mathbf{1} \quad (35)$$

で与えられる。ここで ∇ は \mathbf{X} についてのナブラ演算子。²⁵

Young の伸長変形 単純な一軸伸長, $\vec{\mathbf{X}}' = \vec{\mathbf{X}} + \epsilon X_x \hat{x}$ あるいは $\mathbf{M} = \mathbf{1} + \epsilon \hat{x} \hat{x}^t$ とは違って、Young の伸長条件は横方向の伸縮を伴う。Poisson 比 ν をつかって x 軸に沿う Young の変形 $\vec{\mathbf{X}}' = \mathbf{L}_{\epsilon}^{(x)} \vec{\mathbf{X}}$ は次のように書かれる：

$$\mathbf{L}_{\epsilon}^{(x)} : \vec{\mathbf{X}} \mapsto \vec{\mathbf{X}}' = \vec{\mathbf{X}} + \epsilon(X\hat{x} - \nu Y\hat{y} - \nu Z\hat{z}) \quad (36)$$

あるいは、

$$\mathbf{L}_{\epsilon}^{(x)} = (1 - \epsilon\nu)\mathbf{1} + \epsilon(1 + \nu)\hat{x}\hat{x}^t. \quad (37)$$

熱力学的安定性条件から $-1 \leq \nu \leq 1/2$ である。上付き添字 (x) は Young 伸長の軸方向をあらわす。

変形のテンソルの対称部分のとりだし どの教科書にも書かれているように、変形のテンソル \mathbf{M} の反対称部分は着目する要素の変形に寄与しない。実際、近接 2 点のベクトル $\Delta\mathbf{X}$ の変形による結果は²⁶

$$\begin{aligned} \|\Delta\mathbf{X}'\|^2 &= [\Delta\mathbf{X} + (\mathbf{M} - \mathbf{1})\Delta\mathbf{X}]^t \cdot [\Delta\mathbf{X} + (\mathbf{M} - \mathbf{1})\Delta\mathbf{X}] \\ &= \|\Delta\mathbf{X}\|^2 + 2\Delta\mathbf{X}^t \cdot (\mathbf{M} - \mathbf{1})^{(\text{sym})} \cdot \Delta\mathbf{X} + \mathcal{O}(\|\mathbf{M} - \mathbf{1}\|^2), \end{aligned} \quad (38)$$

となって、微少変形の範囲では反対称部分があらわれない。変位 \mathbf{u} をつかうと $(\mathbf{M} - \mathbf{1})^{(\text{sym})}$ は

$$(\mathbf{M} - \mathbf{1})^{(\text{sym})} = \frac{1}{2} \left\{ \nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^t \right\} \equiv \mathbf{W}^{(\text{sym})} \quad (39)$$

と書ける。

対角化された 3 軸変形の運動量流束 まずは変形の主軸が x, y, z 軸に合致する場合の変形、

$$\mathbf{M}^{(\text{sym})} = \mathbf{1} + \delta_x \hat{x}\hat{x}^t + \delta_y \hat{y}\hat{y}^t + \delta_z \hat{z}\hat{z}^t \quad (40)$$

あるいは $\mathbf{W}^{(\text{sym})} = \delta_x \hat{x}\hat{x}^t + \delta_y \hat{y}\hat{y}^t + \delta_z \hat{z}\hat{z}^t$ を考えよう。微少変形の範囲で 3 軸に関する Young の伸長の積

$$\mathbf{M}^{(\text{sym})} = \mathbf{L}_{\epsilon_x}^{(x)} \mathbf{L}_{\epsilon_y}^{(y)} \mathbf{L}_{\epsilon_z}^{(z)} \quad (41)$$

で書き直したい²⁷。ここで既に定義したように $\mathbf{L}_{\epsilon_x}^{(x)} \equiv \mathbf{1} + \epsilon_x [\hat{x}\hat{x}^t - \nu(\hat{y}\hat{y}^t + \hat{z}\hat{z}^t)]$, etc である。問題は逆行列の計算問題

$$\begin{pmatrix} 1 & -\nu & -\nu \\ -\nu & 1 & -\nu \\ -\nu & -\nu & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_x \\ \delta_y \\ \delta_z \end{pmatrix}, \quad (42)$$

²⁵ より正確には転置演算子^tをつかって $\nabla \mathbf{u}$ でなくて $\nabla \mathbf{u}^t$ 、 $(\nabla \mathbf{u})^t$ でなくて $(\nabla \mathbf{u}^t)^t$ と書くべきである。デカルト座標では $[\nabla \mathbf{u}^t]_{\alpha\beta} \equiv \frac{\partial u_\beta}{\partial X_\alpha}$ 。

²⁶ テンソル \mathbf{A} の転置 \mathbf{A}^t は $\vec{x}^t \cdot (\mathbf{A} \cdot \vec{y}) \equiv (\mathbf{A}^t \cdot \vec{x}) \cdot \vec{y}$ によって定義し、対称部分 [反対称部分] はそれぞれ $\mathbf{A}^{(\text{sym})} \equiv \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^t)$ [$\mathbf{A}^{(\text{asym})} \equiv \frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^t)$] で定義する。

²⁷ 微少変形の範囲で積の順序は不問。

に帰着し、結果は

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \end{pmatrix} &= \frac{1}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{pmatrix} 1-\nu & \nu & \nu \\ \nu & 1-\nu & \nu \\ \nu & \nu & 1-\nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_x \\ \delta_y \\ \delta_z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\delta_x}{1+\nu} + \frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\delta_x + \delta_y + \delta_z) \\ \frac{\delta_y}{1+\nu} + \frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\delta_x + \delta_y + \delta_z) \\ \frac{\delta_z}{1+\nu} + \frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\delta_x + \delta_y + \delta_z) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (43)$$

となる。こんなことをして何が得かという、この ϵ から Young の伸長則によって（伝導性の）運動量流束が求まるのである：

$$\mathcal{G}_{\text{cond}} = -E(\epsilon_x \hat{x}\hat{x}^t + \epsilon_y \hat{y}\hat{y}^t + \epsilon_z \hat{z}\hat{z}^t). \quad (44)$$

直前の結果を代入すると、

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{\text{cond}} &= -\frac{E}{1+\nu}(\delta_x \hat{x}\hat{x}^t + \delta_y \hat{y}\hat{y}^t + \delta_z \hat{z}\hat{z}^t) - \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}(\delta_x + \delta_y + \delta_z)(\hat{x}\hat{x}^t + \hat{y}\hat{y}^t + \hat{z}\hat{z}^t) \\ &= -\frac{E}{1+\nu}\mathbf{W}^{(\text{sym})} - \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\text{Tr}(\mathbf{W}^{(\text{sym})})\mathbf{1} \end{aligned} \quad (45)$$

となる。ここで $\text{Tr}(\mathbf{W}^{(\text{sym})}) = \delta_x + \delta_y + \delta_z = \nabla \cdot \mathbf{u}$ は体積膨張を表す。更に通常の教科書の形式に書き直す：

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{\text{cond}} &= -\frac{E}{2(1+\nu)}\left(2\mathbf{W}^{(\text{sym})} - \frac{2}{3}\text{Tr}(\mathbf{W}^{(\text{sym})})\mathbf{1}\right) - \frac{E}{3(1-2\nu)}\text{Tr}(\mathbf{W}^{(\text{sym})})\mathbf{1} \\ &= -\mu\left[\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^t - \frac{2}{3}(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{1}\right] - K(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{1} \\ &= -\boldsymbol{\sigma}, \end{aligned} \quad (46)$$

これによって剪断弾性率 μ および体積弾性率 K の別の表現がえられた。

単純剪断変形への応用 角度 γ ($|\gamma| \ll 1$) で特徴づけられる単純剪断

$$\mathbf{M}_\gamma : \vec{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \mapsto \vec{\mathbf{X}}' = \begin{pmatrix} X + \gamma Y \\ Y \\ Z \end{pmatrix}, \quad (47)$$

に上の結果を適用するには、対称部分の抽出と変形主軸の同定をせねばならない。図 19 を参照。変形の行列 \mathbf{M}_γ は、 xy -面内の回転のテンソル

$$\mathbf{U}_\gamma \equiv \begin{pmatrix} \cos \frac{\gamma}{2} & \sin \frac{\gamma}{2} & 0 \\ -\sin \frac{\gamma}{2} & \cos \frac{\gamma}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \simeq \mathbf{1} + \frac{\gamma}{2}(\hat{x}\hat{y}^t - \hat{y}\hat{x}^t). \quad (48)$$

と対称変形のテンソル \mathbf{V}_γ の積（微少変形の範囲で順不同）に書ける：

$$\mathbf{M}_\gamma = \mathbf{V}_\gamma \mathbf{U}_\gamma, \quad \mathbf{V}_\gamma \equiv \mathbf{1} + \frac{\gamma}{2}(\hat{x}^* \hat{x}^{*t} - \hat{y} \hat{y}^{*t}) \quad (49)$$

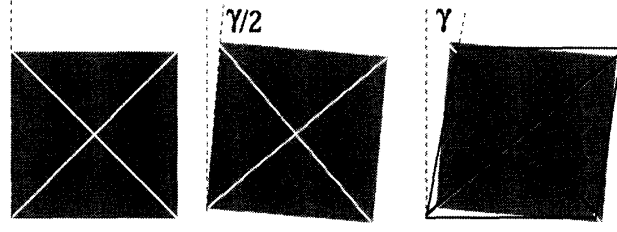


図 19: 単純剪断, $\partial u_x / \partial y = \gamma$ の構成

ここで後者のテンソルの主軸を与えるベクトルは

$$\hat{x}^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x} + \hat{y}), \quad \hat{y}^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\hat{x} + \hat{y}), \quad \hat{z}^* = \hat{z} \quad (50)$$

である。(40)-(43) の結果を $V_\gamma = L_{\epsilon_x^*}^{(x^*)} L_{\epsilon_y^*}^{(y^*)} L_{\epsilon_z^*}^{(z^*)}$ と置いて適用すると、

$$V_\gamma = L_{\frac{\gamma}{2(1+\nu)}}^{(x^*)} L_{-\frac{\gamma}{2(1+\nu)}}^{(y^*)} \quad (51)$$

を得る。したがって、運動量流束は²⁸

$$\begin{aligned} \mathcal{G} &= -E \frac{\gamma}{2(1+\nu)} \hat{x}^* \hat{x}^{*t} + E \frac{\gamma}{2(1+\nu)} \hat{y}^* \hat{y}^{*t} \\ &= \mu \gamma (-\hat{x}^* \hat{x}^{*t} + \hat{y}^* \hat{y}^{*t}) \\ &= -\mu \gamma (\hat{x} \hat{y}^t + \hat{y} \hat{x}^t). \end{aligned} \quad (52)$$

単純剪断変形状態の見方 図 20 を参照。単純剪断というのは操作的に特徴付けられているだけ

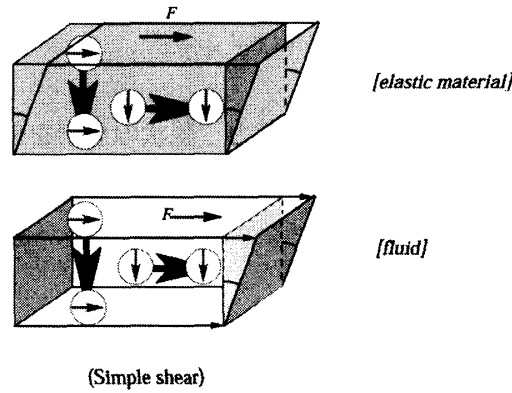


図 20: (回転を除いた) 剪断条件における運動量流束 $\mathcal{G} = -\mu \gamma (\hat{x} \hat{y} + \hat{y} \hat{x})$.

で、変形の主軸に即して見れば同じ強さの圧縮と伸長が直交している [混合] 状態である。もとの座標軸にもどると様々な見方ができる。運動量流の立場でいうと、上面の板に注ぐ運動量は

$$\mathcal{G} \cdot \hat{y} = -\mu \gamma \hat{x} \quad (53)$$

²⁸ $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$

の力で板を左に引き戻そうとし、或は同じ状態の物質を x 軸に垂直な左右の平行板で支えれば右の板は

$$\mathcal{G} \cdot \hat{x} = -\mu\gamma \hat{y} \quad (54)$$

の力で下方に引かれる。今度は運動量の x -成分にのみ注目すると、それは

$$\hat{x}^t \cdot \mathcal{G} = -\mu\gamma \hat{y}^t \quad (55)$$

によって下方に流れ、上の水平板から注入した運動量が下の水平板に伝導することを示す。さらに

$$(-\hat{y}^t) \cdot \mathcal{G} = \mu\gamma \hat{x}^t \quad (56)$$

はまた別の見方を示唆する。

粘性流体の剪断流 弾性体から粘性流体への形式的移行は (46) において $\mathbf{u} \mapsto \mathbf{v}_{el}$ と置き換え、次に $\mu\tau_{el} \mapsto \eta$ とすれば得られる。体積変形についても同様に $K\tau_{el} \mapsto \zeta$ と扱えるが、液体の圧縮は（非臨界状態の遅い流れでは）通常無視する。これは $K(\nabla \cdot \vec{u})$ や $\zeta(\nabla \cdot \vec{v})$ を有限に保って $K \rightarrow \infty$ とすることすなわち

$$\nabla \cdot \mathbf{v}^t = 0 \quad (57)$$

を課することになる一方で、件の有限値を等方の圧力項として残すことになる。こうして次式を得る。

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{\text{cond}} &= -\eta \left[\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^t \right] + p \mathbf{1} \\ &= -\boldsymbol{\sigma}. \end{aligned} \quad (58)$$

単純剪断流の（伝導性）運動量流束は知られた次式になる：

$$\mathcal{G} = -\eta \dot{\gamma} (\hat{x} \hat{y}^t + \hat{y} \hat{x}^t). \quad (59)$$

剪断性の運動量流束の例：連続弾性体での内部応力 線状の要素を使う力学回路網との記述の違いは、いわゆる剪断的な変形によって運動量をその方向以外の向きに流せることである。その結果、図 21(a) のような状況で運動量の循環がマクロに生じることがある。「コ」の字型の枠のうち左右の縦の辺はそれぞれ運動量流

$$\mathcal{G} = \tau(\hat{x} \hat{y}^t + \hat{y} \hat{x}^t) \quad (\text{左の辺}), \quad \mathcal{G} = -\tau(\hat{x} \hat{y}^t + \hat{y} \hat{x}^t) \quad (\text{右の辺}) \quad (60)$$

により x -成分の運動量を y -方向に伝導させる。

同図 21 の (b) はレセプタータンパク質がリガンド分子を結合する様子を模式的に示す。左図と同様な状況が生じている。リガンドが深く結合されるにしたがい、それとレセプターの結合はタンパク質を変形させる。これが引き起こすタンパク質内の運動量の流れはリガンドも組込んで循環回路をつくる。上のリガンド部は左右に引張られ、タンパク質の底辺は圧縮的になっているので循環のようすは図 (a) の矢印に類似する。シグナル分子をなるべく可逆に検出したい場合には、タンパク質変形のエネルギーコストとリガンド結合のエネルギーゲインの相殺も図られていると思う [4]。

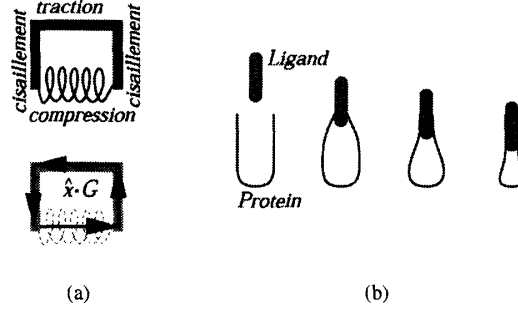


図 21: (a) (上図) バネとそれを押し込める「コ」の字型の枠。(下図) 対応する x -成分運動量 $(\hat{x} \cdot \mathcal{G})$ の循環。(b) 左図に似た状況を実現する “induced fit” 機構。

3.8 積分型の運動量保存則

運動量の流れを意識する形式で運動方程式を書くと、Euler 描像で全運動量流 \mathcal{G} を使うか、Lagrange 描像で伝導性運動量 $\mathcal{G}_{\text{cond}}$ のみを使うかによって、それぞれ

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho \vec{v})}{\partial t} &= \rho \vec{f} - \nabla \cdot \mathcal{G}, \\ \rho \frac{D\vec{v}}{Dt} &= \rho \vec{f} - \nabla \cdot \mathcal{G}_{\text{cond}}, \end{aligned} \quad (61)$$

と書ける。ここで、Lagrange 微分 D/Dt は

$$\frac{DQ}{Dt} \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{Q(\vec{x} + \vec{v}(\vec{x}, t)\epsilon, t + \epsilon) - Q(\vec{x}, t)}{\epsilon} = \frac{\partial Q}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)Q \quad (62)$$

で与えられ、また全運動量流束 $\mathcal{G} = \mathcal{G}_{\text{conv}} + \mathcal{G}_{\text{cond}}$ のうち、対流性の運動量流束は $\mathcal{G}_{\text{conv}} = \rho \vec{v} \vec{v}^t$ 、伝導性のそれは $\mathcal{G}_{\text{cond}} = -\sigma$ である。これらは標準的な事柄であるが、積分表示の保存則からの導出をまとめておく。

任意の 1 成分の保存量密度 Q について、固定された体積 V_0 をめぐるバランスの式は

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V_0} Q(\vec{x}, t) dV &= \int_{V_0} \frac{\partial Q(\vec{x}, t)}{\partial t} dV \\ &= \int_{V_0} s_Q(\vec{x}, t) dV + \int_{\partial V_0} \vec{j}_Q^t(\vec{x}, t) \cdot (-\hat{n}) dS \end{aligned} \quad (63)$$

と書ける。ここで s_Q は source term。たとえば質量密度 $Q = \rho$ については、source term はなく、

$$\begin{aligned} \int_{V_0} \frac{\partial \rho(\vec{x}, t)}{\partial t} dV &= - \int_{\partial V_0} \rho \vec{v}^t \cdot \hat{n} dS \\ &= - \int_{V_0} \nabla \cdot (\rho \vec{v}^t) dV. \end{aligned} \quad (64)$$

他方 x -成分の運動量密度 $Q = \hat{x}^t \cdot (\rho \vec{v})$ を選べば source term が遠達力/質量 \vec{f} を介してあり得て、

$$\begin{aligned} \int_{V_0} \frac{\partial (\hat{x}^t \cdot (\rho \vec{v}))}{\partial t} dV &= \int_{V_0} (\hat{x}^t \cdot (\rho \vec{f})) dV + \int_{\partial V_0} (\hat{x}^t \cdot \mathcal{G}) \cdot (-\hat{n}) dS, \\ &= \int_{V_0} (\hat{x}^t \cdot (\rho \vec{f})) dV - \int_{V_0} \nabla \cdot (\hat{x}^t \cdot \mathcal{G}) dV \end{aligned} \quad (65)$$

となる。 y, z -成分の運動量密度についても同様の関係をたてて、それらをあわせると、

$$\frac{d}{dt} \int_{V_0} (\rho \vec{v}) dV = \int_{V_0} (\rho \vec{f}) dV - \int_{\partial V(t)} \mathcal{G} \cdot \hat{n} dS \quad (66)$$

を得る。さらに、積分領域 $V(t)$ を物質 [質量] 移動に追尾させると、

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} (\rho \vec{v}) dV = \int_{V(t)} (\rho \vec{f}) dV - \int_{\partial V(t)} \mathcal{G}_{\text{cond}} \cdot \hat{n} dS \quad (67)$$

を得る²⁹。Lagrange 描像では特に $V(t)$ が流体中の固体粒子（ビーズ）の領域だったりしてもよい。（そういう意味では積分型のほうが使いである。）

以上でいちおう枠組みの説明は終わる。沢山積み残したところがあるが、それらについては終章で列挙する。次章では少し複合的な例などを挙げてみる。

4 応用

4.1 円筒状の固体の軸回りの回転

軸対称性のある問題に運動量保存則を適用すると、ある種の関係式が得られる。先ず太さの無い円状の回転体について述べ、つづいて厚みのある回転円筒について調べる。

4.1.1 軸回りに回転する円状物体

図 22 ように輪ゴムのようなものが円対称を保って角速度 Ω で孤立回転している。重力や摩擦は無視しよう。半径を R , 経路長あたりの質量を ρ_1 とする。遠心力で広がろうとする輪ゴムはどれだけの張力を受けるだろうか。運動量の流れの観点では次のようにこたえる。任意の固定角度

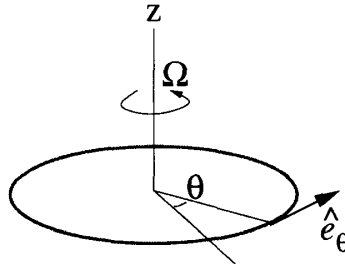


図 22: 軸回りに定常回転する円状物体。

θ での断面を横切る全運動量流（厚みがないので flux ではなく current） \vec{J}_{tot} を考える。これはゼロでなければならない。さもなければ別の固定角度 θ' では前者との角度差だけ回転された \vec{J}_{tot} が

²⁹詳細: $\frac{\partial}{\partial t}(\rho \vec{v}) + \nabla \cdot ((\rho \vec{v}) \vec{v}^t) = \rho \frac{D\vec{v}}{Dt} + \vec{v} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}^t) \right] = \rho \frac{D\vec{v}}{Dt}$, また $\frac{d}{dt} \int_{V(t)} (\rho \vec{v}) dV = \int_{V(t)} \left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho \vec{v}) + \nabla \cdot ((\rho \vec{v}) \vec{v}^t) \right] dV = \int_{V(t)} \left[\frac{D(\rho \vec{v})}{Dt} + \rho \vec{v} (\nabla \cdot \vec{v}^t) \right] dV = \int_{V(t)} \rho \frac{D\vec{v}}{Dt} dV = \int_{V(t)} (\rho \vec{f}) dV - \int_{V(t)} (\nabla \cdot \mathcal{G}_{\text{cond}}) dV = \int_{V(t)} (\rho \vec{f}) dV - \int_{\partial V(t)} \mathcal{G}_{\text{cond}} \cdot \hat{n} dS$.

あって、その差分を両端以外のどこか外から供給（「力を加える」）せねばならない。さてこのゼロであるべき全運動量流は対流性の寄与 $G_{\text{conv}} = \rho_1 \Omega^2 R^2 \hat{e}_\theta \hat{e}_\theta^t$ と、伝導性の寄与 $G_{\text{cond}} = P \hat{e}_\theta \hat{e}_\theta^t$ からなるので、直ちに $P = -\rho_1 \Omega^2 R^2$ （負号は張力を表す）が求まる。遠心力などを使わずに答が求まるのはすこし驚きかもしれない³⁰。

たとえば、輪ゴムの半径を $R = 2.0[\text{cm}]$ 、断面積を $D = 1[\text{mm}^2]$ 、質量（体積）密度を $\rho_3 = 1.2[\text{g/cm}^3]$ とすると、 $|P| = 0.48\Omega^2[\text{Pa}] = [\text{N/m}^2]$ となる。毎秒 10 回転（ $\Omega = 10 \times 2\pi/\text{sec}$ ）だと $|P| \simeq 2[\text{kPa}]$ となり、ゴムのヤング率（200MPa 程度）での伸長比は 10^{-5} 程度で無視できる。

4.1.2 軸回りに回転する円筒状物体

図 23 のように、半径 R_1 と R_2 の間を占める物体（“タイヤ”）が角速度 Ω で定常回転している。上の例と同様の理由によって任意の固定角度の断面を横切る全運動量流束 \mathcal{G} の積分はゼロでなけ

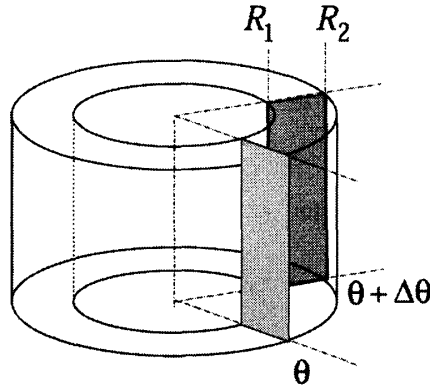


図 23: 半径領域 $R_1 \leq r \leq R_2$ を占める「タイヤ」

ればならない³¹。

$$\vec{G}(\theta) \equiv \int_{R_1}^{R_2} \mathcal{G} \cdot \hat{e}_\theta dr = 0. \quad (68)$$

動径方向の弾性変位 u_r が微小という仮定の下では、半径 r で面を横切る対流性の運動量流束は 3 次元質量密度を ρ_3 とし

$$G_{\text{conv}} \cdot \hat{e}_\theta = \rho_3 \Omega^2 r^2 \hat{e}_\theta \quad (69)$$

で与えられ、同じ点での伝導性の運動量流束と u_r は（等方弾性体の構成方程式の円筒座標での書き換え）

$$G_{\text{cond}} \cdot \hat{e}_\theta = -\frac{E \hat{e}_\theta}{1+\nu} \frac{u_r}{r} - \frac{E \nu \hat{e}_\theta}{(1+\nu)(1-2\nu)} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} [r u_r] \quad (70)$$

と書ける。バルクの問題では条件 (68) のみでは u_r の詳細は分らないが、具体的に局所的な釣合い方程式（＝運動量の保存則）を解いた結果は

$$u_r = \frac{B}{8} \left[-r^3 + (3-2\nu)(R_1^2 + R_2^2)r + \frac{3-2\nu}{1-2\nu} \frac{R_1^2 R_2^2}{r} \right] \quad (71)$$

³⁰ゴムの伸びが無視できないと、 ρ_1 も R も張力から無撞着に決めねばなるまいが、それは運動量流れのアプローチに固有の問題ではない。

³¹以上の議論は軸対称性があるかぎり、内部応力が存在していても成り立つ。

のかたちをしており、係数 B は (68) を満足するように決定される。

4.2 静止流体の力学

動き [運動量] のないところにも伝導性の運動量の流れはあるという例を更にみてみよう。

4.2.1 静水圧の空間変化

図 24(a) のような鉛直容器を満たす流体（上端は自由表面）では、下方にゆくほど静水圧が高くなっている。運動量流の見方では、流体を高さ毎の層に分け、そのそれぞれに鉛直成分の運動量が重力源から注ぎ込まれると考える。この成分は自由表面や側壁に流れ込むわけにはいかないので、皆が底面にむけて流れる（図の下向矢印）。このため、下方にゆくほど（伝導性）運動量流束が混み合い、圧力の等方化効果（既述）と相俟って静水圧の増加をもたらす。

図 24(b) のように流体が水平/垂直でない領域を占めるときは、その領域を (a) のような矩形に細分して矢印つき曲線のような順に継ぎ足してゆけば圧力差がもとまり、高さだけの関数であることも理解される。

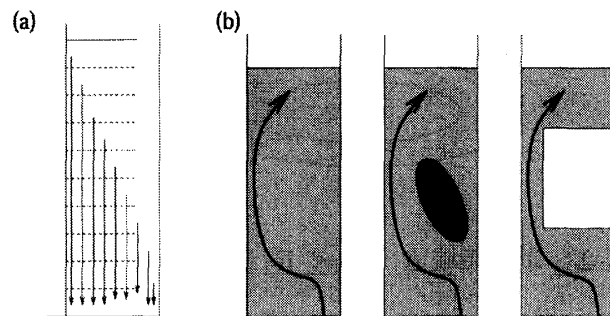


図 24: (a) 矩形領域（上面は自由表面）を占める流体への運動量の注入とその後の流れ。(b) 圧力は高さに依存して、壁や介在物の形状によらない。

4.2.2 アルキメデスの浮力

図 25 に示す黒い物体には、静水圧に対応する次の伝導性運動量流束が表面から流れ込む。

$$\int_{\partial V_F} \mathcal{G} \cdot (-\hat{n}) dS = - \oint_{\partial V_F} p \hat{n} dS. \quad (72)$$

ここで ∂V_F は流体に接する物体の表面で、そこでの単位法ベクトル \hat{n} は（習慣によって）物体から外向きに選んだ。これと物体自体の質量へ向けて重力源が注入する運動量との総和がいわゆる物体に働く力となる³²。

³² 液体の外側にも大気圧の静水圧があるが、その高さ依存は無視できるとしていまは論じない。

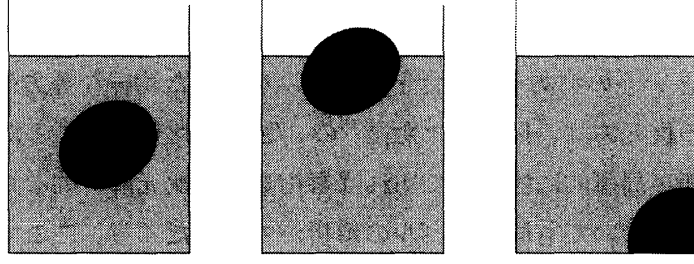


図 25: Object (black) in a fluid with different ∂V_F .

4.3 膜

4.3.1 任意形状の閉じた膜の幾何学

3次元空間内に任意形状の滑らかな閉じた面（膜）が与えられたとして、その各点での主曲率 κ_1, κ_2 および外向き単位法ベクトル \hat{n} が与えられると、表面積分についての次の等式

$$\oint_{\text{closed}} (\kappa_1 + \kappa_2) \hat{n} dS = \mathbf{0} \quad (73)$$

が成り立つ。これを物理的な議論を用いて納得しよう。

いま膜が一様な表面張力 γ をもつと考えよう。これは静水圧の2次元版で、局所的な接平面の正規直交基底を $\hat{u}_{\perp,1}, \hat{u}_{\perp,2}$ とすると、面内で等方な運動量流束は $\mathcal{G} = -\gamma(\hat{u}_{\perp,1}\hat{u}_{\perp,1}^t + \hat{u}_{\perp,2}\hat{u}_{\perp,2}^t)$ と書ける。

もし膜状の微少面要素 ΔS が平坦ならそこから流れ出る全運動量/秒すなわち周辺積分 $\oint_{\partial\Delta S} \mathcal{G} \cdot \hat{u} dl$ はゼロである (Gauss-Green の定理³³の2次元版の簡単な例)。ただし \hat{u} は ΔS の境界 $\partial\Delta S$ の各点で面に接しかつ境界に垂直な外向き単位ベクトル。もし膜状の微少面要素 ΔS が曲率をもてば、そこから流れ出る全運動量/秒はゼロでなくなり、運動量保存は Laplace の圧力 $\gamma(\kappa_1 + \kappa_2)$ による膜内部から膜への運動量の注入によって補償される³⁴：

$$\oint_{\partial\Delta S} \mathcal{G} \cdot \hat{u} dl = \gamma(\kappa_1 + \kappa_2) \hat{n} \Delta S. \quad (74)$$

そこで膜表面を微少なパッチワーク（曲面素） ΔS に分割した各々でこの成り立つ。そして、すべてのパッチワークを張り合わせると、境界での運動量の流れは境界を共有するパッチワークどうしで打ち消しあい、(74) の左辺をすべての ΔS について足し合せたものはゼロになる。したがって (73) となる。

³³ $\oint \hat{n} dS = \int (\nabla \cdot \mathbf{1}) dV = 0$.

³⁴ Laplace 圧力というのはこの式を認めるための道具にすぎず、閉曲面の内部で圧力が一様かどうかはまったく問題ではない。

4.3.2 風船の復元力

Hertz の接触理論 [5] というのがあって、たとえば丸みを帯びた均一な等方弾性体を硬い平板に押付けた際の微小変形の復元力は、押付けた距離³⁵の $3/2$ -乗に比例することが知られている。接触する前の弾性体の表面が局所的に楕円面であれば冪指数は半次元解析的な議論からも説明できる。気体で膨らんだ風船についても同じレベルの解析ができるだろう。ここでは運動量の流れの見方で扱ってみる。(その必然性は無いのだが。)

図 26(a) は Hertz の問題と同様の状況設定で、簡単のために風船は半径 R の球状とする。平板とゴム膜の間に凝集力 (cohesive force) が無いとする。距離 δ だけ押付けると、図 (a) で濃く塗った接触面は (良い近似で) 半径 $\sqrt{R^2 - (R - \delta)^2} \simeq \sqrt{2R\delta}$ をもつ。風船膜を介してどれだけの運動量/秒が平板に流れるかわかればすなわち復元力がわかったことになる。

接触面の縁ではゴム膜から板への直接の運動量の流れは無いので³⁶、板に流れる対称軸成分の運動量/秒は風船内部の静水圧が半径 $\sqrt{2R\delta}$ の接触円盤を通して流し込む $2\pi R(\Delta p)\delta$ とみてよいだろう。これが復元力である。ここで Δp は内部圧と大気圧の差である。

そこで復元力と押付けた距離 δ とは Hertz の場合とは違って比例関係にある。これは簡単な実験で確かめられる。ちなみに硬い平板のかわりに短冊 (図 26(b)) や細い円柱 (図 26(c)) に押付けると、更に小さな冪乗則が得られるかということ、ことはそう単純ではない。押付けたものの縁はゴム膜の形状に特異性を産み、それを介して膜内を伝導するの 2 次元的運動量流が流れ込む効果を見捨てることはできない。

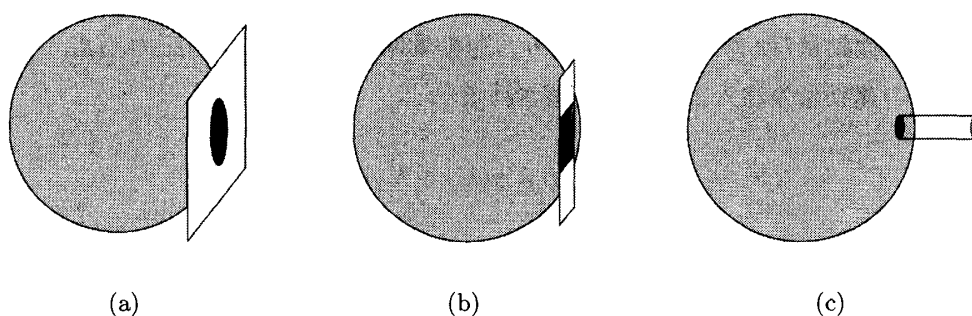


図 26: (a) 平板に球形のゴム風船を押付ける。同じく、短冊 (b) および細い円柱 (c) に押付ける。

³⁵indentation, interpenetration など

³⁶ゴム膜は平板になめらかに接する。

4.3.3 液滴と液橋

液体内部の運動量流と液表面の界面張力による運動量流のどちらも意識しましょう、というのがこの小節の主旨である。

天井から懸垂する液滴 すでに薄い液膜で覆われた水平な天井（風呂場の天井）から徐々に液滴が成長してついに滴下するという現象について考えてみよう（図 27）。運動量の鉛直 (z -) 成分にのみ着目する。慣性や対流性の運動量流れは無視できる準静的な状況で、図の波線で示した断面（薄い液膜よりは下でかつ液滴の殆んどより上）でどのような運動量収支があるだろうか。特に、天井が波線より下の部分から受ける力と、この部分に加わる重力との大小関係はどうだろうか。

1つの方法は、波線の断面で鉛直成分の運動量の流れを全部積分するというものである。この際には、液滴内部の静水（負）圧の寄与と、液滴表面の切口での表面張力の寄与を合計すべきだ。前者の静水負圧は、波線以下の部分の質量がこの面を引張る効果と思いがちだが、更に懸垂した表面の曲率による Laplace 圧力の効果を減殺せねばならない。後者の表面張力は液面に沿って運ばれる運動量のうち鉛直成分だけが正味寄与する。

もう一つの方法は、波線の断面以下の部分に流れ込む全運動量/秒を計算するというものである。これは重力定数にこの部分の質量を乗じたものがすべてである。運動量保存則によれば、ちょうどこれだけの全運動量/秒が駆け登って、あるいは液滴内部の負圧あるいは表面張力として波線の断面を横切って上に流れてゆく。圧力分布や表面形状の詳細は知る必要がない。

結果としては、大小関係の答は「等しい」となるが、保存量は都合のよい所で勘定すればよい、という例である。

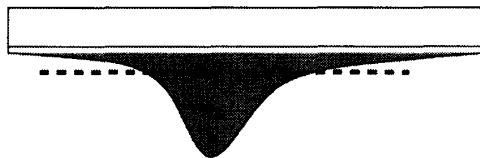


図 27: 湿った天井から懸垂する液滴

液橋 粉粒体を液体に浸してそれを乾燥させてゆくと、粒子同士の間に液体の橋ができて（図 28）粒子間の有効的な引力相互作用を及ぼすことがある。粒子間の直接の接触相互作用はさておいて、この液橋の作る引力をその形状から見積もってみよう。重力の影響は無視する（毛管長より小さな尺度で良い近似）。懸垂液滴の例と同様、都合の良い場所で全運動量の流れを求めるというアプローチをとる。液橋が軸対称性をもつとし、その最もくびれた所を通る面で対称軸に平行な成分の全運動量流を評価しよう。切口を円とみだててその半径を R_{\min} とする。これは円周上での主曲率半径の一方とみなしてよいだろう。それに直交する方向のもう一つの曲率半径（反対符号）を観察あるいは見積もって r_0 とする³⁷。これで内部の Laplace 圧力（負圧） $\Delta p = \gamma(R_{\min}^{-1} - r_0^{-1})$

³⁷ 粉体の本などで $r_0 \sim (\text{粒径})/10$ とかいう見積もりを見ることがある。

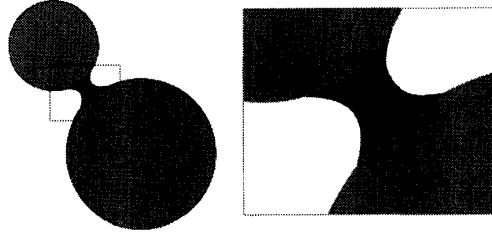


図 28: 2 粒子間の液橋

が決まり、液体内の運動量流は $\pi R_{\min}^2 \Delta p$ となる。これに切口の円周における表面張力による運動量流 $-2\pi R_{\min} \gamma$ を加える。Laplace 負圧の表式を代入して、全運動量の流れ、従って液橋による凝集力は次式になる：

$$F_{\text{bridge}} = -\gamma \pi R_{\min} \left(\frac{R_{\min}}{r_0} + 1 \right).$$

強い負圧 ($R_{\min} \gg r_0$) の元では、括弧内の 1 は無視でき、表面張力の直接の寄与 ($\propto \gamma R_{\min}$) に較べて、凝集力は R_{\min}/r_0 倍強くなることがわかる。

4.3.4 内圧を支える円筒状の管

長いゴム風船を膨らませて内圧が外圧より Δp 高い状態で放置するとき、ゴム膜の θ -方向の張力はこの圧力差に直径を乗じたものになる。回転する輪ゴムの例（既述）のように、ゼロサム則を使うと説明しやすい。

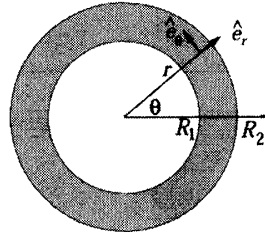


図 29: 内圧の加わっているパイプ ($R_1 \leq r \leq R_2$)

図 29 をゴム風船の長軸に垂直な断面と見たとき、軸を通る直径（仮に水平 $[\theta = 0, \pi]$ としよう）を横切って流れる全運動量流はゼロでなければならない。さもないと外部から運動量を注入せねばならないから。

他方で内部の過剰圧はこの直径に垂直な成分の運動量を軸長さあたり $2R_1 \Delta p$ /秒だけ流し込む。そこでゴム膜はこれをちょうど打ち消すだけの運動量（従って張力）を流さねばならないのである。

厚みを見捨てないパイプの問題になると、ふたたびゼロサム則だけではすべては決まらないが、法則自体は以下のように確かめることができる。（面倒なむきは次節に飛ばれよ。）

以下では外部の静水圧（大気圧）は無視する。管の物質内での運動量流束は対称性を考慮して次のかたちをとる：

$$\mathcal{G} = \sigma(r)\hat{e}_r\hat{e}_r + t(r)\hat{e}_\theta\hat{e}_\theta + \ell(r)\hat{e}_z\hat{e}_z, \quad (75)$$

内圧のあるときは $\sigma(r) > 0$ および $t(r) < 0$ である。管の端は自由として $\ell(r) = 0$ とおく。物質内での全運動量の保存則 $0 = \nabla \cdot \mathcal{G}$ は³⁸

$$t dr = d[r\sigma] \quad (76)$$

を与える。これを境界条件

$$\mathcal{G}|_{r=R_1} \cdot \hat{e}_r = \sigma(R_1) = \Delta p, \quad \mathcal{G}|_{r=R_2} \cdot \hat{e}_r = \sigma(R_2) = 0 \quad (77)$$

のもとで解くと t や σ が決まる³⁹ののだが、仮に解がなくても、これらの条件だけから水平な直径を横切って流れる全運動量のゼロサム則は導ける：

$$\begin{aligned} 2\hat{e}_y \int_{R_1}^{R_2} t(r) dr &= \int_{r=R_1}^{r=R_2} d[r\sigma(r)] \\ &= 2\hat{e}_y [R_2 \sigma(R_2) - R_1 \sigma(R_1)] \\ &= -2\hat{e}_y R_1 \Delta p, \end{aligned} \quad (78)$$

4.4 定常流の力学

定常流の問題は場の量が時間によらないという点で静水力学に近い（問題が楕円型などになる）。しかし後者との違いは著しく、剪断流が伝導性の運動量流束を生じる。また一般には流体粒子はその流線に沿って加速されうるので、対流性運動量流束を分離して議論できるとは限らない。

4.4.1 重力下の Poiseuille 型の流れ

2次元系：図 30 参照。間隔 $2L$ の鉛直な板の間を流れる定常流では、対流性運動量 $\mathcal{G}_{\text{conv}} = \rho v_z^2 \hat{z} \hat{z}^t$ は鉛直方向に一様なので伝導性運動量と完全に切り離される⁴⁰, $\nabla \cdot \mathcal{G}_{\text{conv}} = 0$ 。他方、重力源は至るところ一様に鉛直方向成分の運動量を注入してくるので、これが下流に累積しないように側壁にむけて鉛直方向成分の運動量を移送せねばならない（図中下部の横矢印）。これが剪断流れによる伝導性運動量流束で、中央から壁に向かうにしたがって混み合ってくる⁴¹。したがって均一 Poiseuille 流の運動量流束は、流れ場を知る前に決まってしまう、速度場（図中上部の縦矢印）は後から決まる。具体的には B を高さによらない係数として、伝導性の運動量流束は

$$\mathcal{G}_{\text{cond}} = B[\hat{z}\hat{x}^t + \hat{x}\hat{z}^t] + p_0 \mathbf{1} \quad (79)$$

³⁸ $\nabla \cdot \mathcal{G} = [\hat{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \hat{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{e}_z \frac{\partial}{\partial z}] \cdot [\sigma(r)\hat{e}_r\hat{e}_r + t(r)\hat{e}_\theta\hat{e}_\theta + \ell(r)\hat{e}_z\hat{e}_z]$ 。そこで $0 = \hat{e}_r \left[\frac{d\sigma}{dr} + \frac{\sigma-t}{r} \right] = \frac{\hat{e}_r}{r} \left[\frac{d(r\sigma)}{dr} - t \right]$ 。ここで $\frac{\partial \hat{e}_r}{\partial \theta} = \hat{e}_\theta$ と $\frac{\partial \hat{e}_\theta}{\partial \theta} = -\hat{e}_r$ を使った。

³⁹ $\sigma(r) = \frac{(r^{-2} - R_2^{-2})}{R_1^{-2} - R_2^{-2}} \Delta p$ および $t(r) = -\frac{(r^{-2} + R_2^{-2})}{R_1^{-2} - R_2^{-2}} \Delta p$ 。結果は弾性率に依存しない。

⁴⁰ 逆に言うと、太さが不均一な管では対流性運動量の流線にそう不均一も管壁への力を生む。

⁴¹ 重力下の完全流体ではこの逃げ場がないので定常流はつくれぬ。

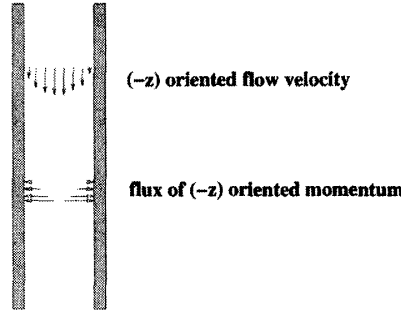


図 30: 鉛直板間をながれる流体。下向運動量 (\propto 速度) の分布 (上部の縦矢印) と、その運動量の流れ (下部の横矢印)。

と書け (p_0 は今は定数)、注入と移送のバランス

$$0 = \rho \vec{g} - \nabla \cdot \mathcal{G} \quad (80)$$

から⁴²

$$\mathcal{G}_{\text{cond}} = -\rho g x [\hat{z}\hat{x}^t + \hat{x}\hat{z}^t] + p_0 \mathbf{1}. \quad (81)$$

を得る。流体が鉛直方向の長さあたりに壁 ($x = \pm L$) を下へ引く力も粘性率や速度場に無関係に決まる:

$$\mathcal{G} \cdot \hat{x} = \mathcal{G}_{\text{cond}} \cdot \hat{x} = \rho g L (-\hat{z}) \quad \text{wall at } x = L, \quad (82)$$

$$\mathcal{G} \cdot (-\hat{x}) = \mathcal{G}_{\text{cond}} \cdot (-\hat{x}) = \rho g L (-\hat{z}) \quad \text{wall at } x = -L. \quad (83)$$

流れ場はこれらが決まってから構成的関係によって与えられる⁴³。

重力による注入運動量を横にいなすという事情に関して、「鉛直な管内に貼りつけられた弾性体」も同様に扱える。(ただし貼付けは内部 [残留] 応力を生じないように行われたものとする。) 図 31 のように弾性体は重力のせいで多少垂れ下がるが、その変形を知るまでもなく伝導性の運動量流束は

$$\mathcal{G}_{\text{cond}} = -\rho g x [\hat{z}\hat{x}^t + \hat{x}\hat{z}^t] + p_0 \mathbf{1} \quad (84)$$

となり、変位場はこれから求まる⁴⁴。

⁴² $\hat{x} \frac{\partial}{\partial x} \cdot (B[\hat{z}\hat{x}^t + \hat{x}\hat{z}^t] + p_0 \mathbf{1}) = \hat{z} \frac{\partial B}{\partial x}$, したがって $B = -\rho g x$.

⁴³ $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ を満たす流れを $\vec{v} = v_z(x) \hat{z}$ ($-L \leq x \leq L$) とし、構成的関係もつかうと、(84) は

$$\mathcal{G}_{\text{cond}} = -\eta \left[\hat{x} \frac{\partial}{\partial x} \cdot v_z(x) \hat{z} + (\text{transposed}) \right] + p_0 \mathbf{1} = -\eta v'_z(x) [\hat{z}\hat{x}^t + \hat{x}\hat{z}^t] + p_0 \mathbf{1}$$

となる。これを上の結果と比べて $\eta v'_z(x) = \rho g x$ を得る。いわゆる粘着境界条件 $v_z(\pm L) = 0$ のもとで解いて $v_z(x) = -\rho g / (2\eta) (L^2 - x^2)$ がもとめる速度場である。

⁴⁴ 変位場を $\vec{u} = U(x) \hat{z}$ と書き、非圧縮性 $\nabla \cdot \vec{u} = 0$ も仮定できるとすると、 $\nabla \vec{u}^t = U'(x) \hat{x}\hat{z}^t$ と固定境界条件から最終的に $\vec{u} = -\frac{\rho g}{\mu} (L^2 - x^2) \hat{z}$ を得る。

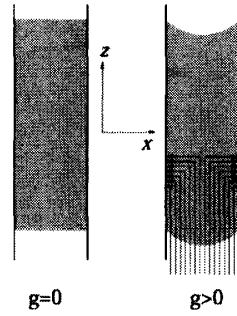


図 31: 鉛直板間に固定された弾性体。重力なし（左）と重力あり（右）。後者では、注入される運動量は鉛直板に流れ、板に近づくほど混み合う。

3次元系：問題を軸対称に拡張しても、運動量の流れの見方はそのまま使える；注入された鉛直方向成分の運動量は動径方向に放射状に移送されて壁に達する。伝導性の運動量流束を

$$\mathcal{G}_{\text{cond}} = B[\hat{e}_z \hat{e}_r^t + \hat{e}_r \hat{e}_z^t] + p_0 \mathbf{1} \quad (85)$$

と書き、（対流性流束は湧出しゼロであることを知った上で） $0 = \rho \vec{g} - \nabla \cdot \mathcal{G}$ を筒内 $r(< R)$ に適応すると $B = -\frac{1}{2}\rho g r$, したがって

$$\mathcal{G}_{\text{cond}} = -\frac{1}{2}\rho g r[\hat{e}_z \hat{e}_r^t + \hat{e}_r \hat{e}_z^t] + p_0 \mathbf{1} \quad (86)$$

を得る。この結果は円柱座標の微分公式を使うまでもなく、次の運動量バランスを考えればよい：半径 r 以内に注ぎ込む運動量/秒 $\pi r^2 \rho \vec{g}$ （鉛直方向の単位長さあたり）は、この半径の円筒側面を出る総流量 $2\pi r \mathcal{G} \cdot \hat{e}_r = 2\pi r B \hat{e}_z$ に等しい。これから $B = -\rho g r/2$ を得る。例によって流束や弾性体アナログ問題の変位はあとで求まる⁴⁵。

応用1 重力でなく管に沿う圧力勾配によって Poiseuille 流が引き起こされる場合の運動量バランスはどうなっているだろう。壁への移行は変わらないが、下流にむかうにしたがって圧力による運動量流が吸い取られて弱くなって行く。（以下の「ゲル中の浸透」を参照。）

応用2 やはり軸対称の流れで、今度は重力を無視する。図 32 のように、内側の円柱（半径 R_0 ）を速度 V で引き上げるときの抵抗力（軸方向の単位長さあたり、下向に大きさ F とする）を知りたい。外側の円筒（内径 R_1 ）は固定する。この例では、内側の円柱が鉛直方向の運動量の供給源で、これが動径方向に流れ出る。伝導性の運動量流束を

$$\mathcal{G}_{\text{cond}} = \eta \phi(r)(\hat{e}_r \hat{e}_z^t + \hat{e}_z \hat{e}_r^t)$$

と書くと、半径 r の円柱側面を通る総流出量は

$$\int_{\text{radius}=r} \hat{e}_z^t \cdot \mathcal{G} \cdot \hat{e}_r dS = 2\pi \eta r \phi(r)$$

⁴⁵ニュートン粘性流体の構成方程式 $\mathcal{G}_{\text{cond}} = \rho \vec{v} \vec{v}^t - \eta(\nabla \vec{v}^t + \nabla^t \vec{v}) + p \mathbf{1}$ に $\vec{v}^t = \hat{z}^t v_z(r)$ を代入し、得られる式 $\mathcal{G}_{\text{cond}} = -\eta v_z'[\hat{e}_z \hat{e}_r^t + \hat{e}_r \hat{e}_z^t] + p_0 \mathbf{1}$ と上の結果を比べて $\eta v_z' = \frac{1}{2}\rho g r$ を得る。境界条件 $v_z(r=R)=0$ も考慮して $v_z = -\frac{\rho g}{4\eta}(R^2 - r^2)$ が得る。弾性体アナログ問題では変位場 $\vec{u} = U \hat{e}_z$ が $U = -\frac{\rho g}{4\mu}(R^2 - r^2)$ と求まる。

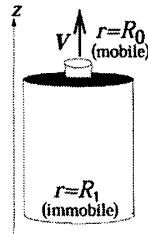


図 32: 同軸状の剪断流

となり、これが総注入量/秒 (即ち力) を F とすると、

$$\phi(r) = \frac{F}{2\pi\eta r} \quad (R_0 \leq r \leq R_1)$$

を得る。最後に F を速度と結びつけるため、構成的関係 $\phi(r) = -\frac{dv(r)}{dr}$ を代入して流体の速度場 $v(r) = -\frac{F}{2\pi\eta} \ln \frac{r}{R_1}$ を得、 $v(R_0) = V$ を課して

$$F = \frac{2\pi\eta V}{\log(R_1/R_0)}$$

を得る。

以上の例では対称性のおかげで問題が実質的に 1 次元に還元された。そのおかげで保存量が流れや変位を求める前に決まった。運動量の流れの見方に都合のよい例だけを選んできたとの批判もあるだろう。それでも「力」の直観だけで押しきるよりは見通しが良さそうだという印象を筆者はもつのだが、どうであろう。

4.4.2 遅い沈降

流体に多数の小さな粒子が懸濁していて、重力によってゆっくり沈降している状況を考えよう (図 33 参照)。懸濁粒子は側壁の影響は受けない (free slip boundary) と仮定する。また水平方向の不均一を生じる対流はないものとする。

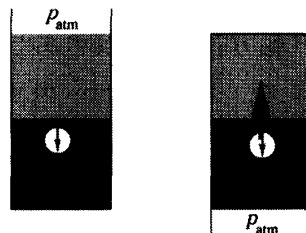


図 33: 懸濁粒子の遅い沈降。塗り潰しの濃さは粒子濃度 (実際は連続的に分布) を表す。左図では底面が懸濁液を支え、右図では天井面が支える。円内矢印は運動量の向き、太い矢印は運動量移送の向きを示す。

鉛直方向の成分の運動量の流れ方をまず粒子サイズで考える。周囲の流体よりも密に運動量注入を受ける粒子は流体のみの場合に比べて余分の運動量を下に向かって流す。圧力の等方化効果（既述）によって、この運動量流れは横方向にも拡散する。

つぎに同じ流れを粒子間の平均間隔よりも粗い空間尺度で見ると、ある高さ z のまわりの厚さ dz に注入された鉛直成分の全運動量/秒は、最終的にそれが流れ出るべき壁（左図では底面、右図では天井面）に向かって移送される。静水圧の議論と同様に、この流れの混み合い方が圧力分布を決める。粗視化した質量密度 $\rho(z)$ が高さ z の関数として与えられると、各高さでの全運動量注入が決まり、準定常的な圧力分布 $p(z)$ は左図の場合

$$p(z) = p_{\text{atm}} + \int_z^{z_{\text{top}}} \rho(z') g dz',$$

また右図の場合

$$p_{\text{atm}} = p(z) + \int_{z_{\text{bottom}}}^z \rho(z') g dz'$$

と与えられる。ここで液の上面を $z = z_{\text{top}}$ 、下面を $z = z_{\text{bottom}}$ にとつた。

4.4.3 ゲル中の浸透

ゲルはきめの細かいスポンジのようなもので、その弾性のかなりはエントロピー的起源をもつ。この弾性は伝導性の運動性流束の一端を担う（浸透圧）。浸透圧自体は静的なもので、スポンジを握って感じる復元力がそれである。流体力学的にはゲルは細管の網目で、流体を流す（溶媒の浸透）には Poiseuille 流のように粘性抵抗を伴う。以下ではゲル中の浸透流が浸透圧とどうかかわりあうかを運動量の流れの視点で扱う。その手ならしに質量流束からはじめよう。

質量流束 図 34 において、非圧縮の流体が円柱の高さ 0 から L にあり、その中で $z_1 < z < z_2$ をゲル（スポンジ）が占めている。さしあたりゲルの体積分率 ϕ は一様とする。底面は閉じられて

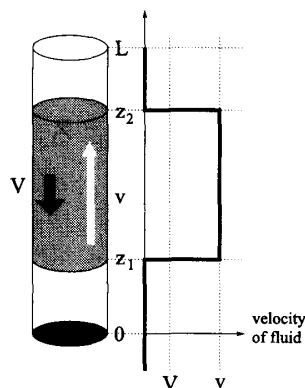


図 34: (左図) 溶媒とその中のゲル（陰をつけた部分）(右図) 溶媒の（平均）速度。

いるとする。いまゲルが全体として速度 V で下降すると、ゲル中の溶媒の上昇速度 v_g はどれくらいだろう？ 質量あるいは非圧縮なので体積保存を適用するにもいろいろな目のつけどころがあるだ

ろう。たとえば実験室系で一定の高さの断面を考えると、全体積流束は 0 でなければいけないから、 $(1 - \phi)v_s - \phi V = 0$ を得る⁴⁶。

運動量流束 上と同じ状況で、但しゲルの下降がその上端面に加えられた力 F /断面積によると特定しよう (図 35 の左図を参照)。この力はゲルのみに働いて溶媒はこの面を自由にすりぬけとする。流体の上端面は大気圧下の自由表面とする。重力の効果は無視し、簡単のためゲルと側壁の摩擦はないものとする。最後に浸透はゆっくりであるとし、対流性の運動量流束を無視する。(マクロなスポンジでは良くない近似かもしれない。)

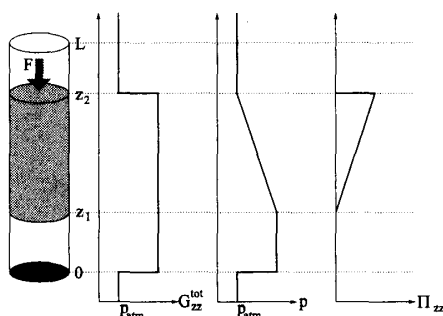


図 35: ゲル上面に加わる力による運動量流束、溶媒圧力、「浸透圧」

加えた力は下向きの運動量をこの面から下方に流す。この保存流は底面 $z = 0$ で容器に移されるまで管中を流れる (図中の G_{zz}^{tot})。

ゲルの下端より下の溶媒はこの流れをすべて担うのでその静水圧は大気圧より F 高くなっている。他方ゲルの上端より上の溶媒はそうではない。溶媒の静水圧をゲル内でも定義するなら⁴⁷、それは上端から下端にむかって単に増大する (右図の p のグラフ)。

最後にゲルの網目の中を通る伝導性の (鉛直方向の成分の) 運動量流束は、ゲルの上端では注入によって F であるが下端は自由表面で 0 である。途中の高さでは上端から下端にむかって単に減少する (右図の Π_{zz} のグラフ)。

後の 2 者は合せて最初全運動量流束に等しくなるべきだから、いっぽうの減少は他方の増大を正確に補償する。両者の移行のメカニズムの基本は Poiseuille 流での壁への運動量流 (図 30) である。実際のゲルでは Π_{zz} に応じたゲルの圧縮がおこる。

4.5 ニュートンのゆりかご

対流性の運動量流束と伝導性のそれが往来する例として特異な相互作用をもつ 1 次元粒子系の古典力学的な衝突について紹介する。粒子は中心間の距離がある一定値 (「直径」) 以下に接近したときのみその「重複」 δ に応じたゼロでない 2 体斥力 δ^α を及ぼしあうとする。ちょうど直径だけ離れている状態を「ちょうど接触する」と言うことにする。図 36(a) のようにちょうど接触して静止する $n - 1$ 個の粒子に左端の粒子が衝突する状況を考える。

⁴⁶ゲルの端面で吸込む/吐出す溶媒を考えてもよいが、その場合は異なる座標系を往来せねばならない。

⁴⁷直接に測定できるのか知らない。

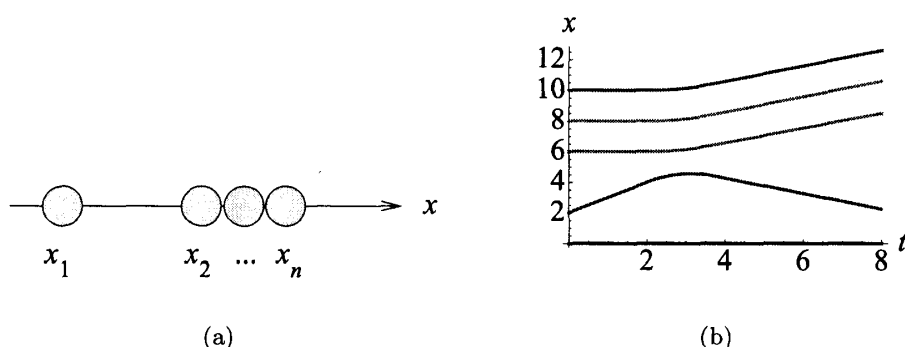


図 36: (a) ちょうど接触する $n-1$ 個の粒子に左端の粒子が衝突する。(b) $n=4$ の場合の重心位置 vs 時刻（数値計算結果）。

$\alpha \gg 1$ だと実質的にドミノ倒しのような 2 体の剛体衝突の連鎖がおこって、最も右端の粒子が全運動量をもって飛び出す。いわゆるニュートンのゆりかご というおもちゃでよく見る（と思っている）現象である。

実際の鉄の玉の衝突は §4.3.2 でのべた Hertz の接触 ($\alpha = 3/2$) が妥当することが確かめられており、ぶつかった左端の粒子のわずかな反跳を含めてどの粒子もわずかに運動量を受け、長時間後にはすべて互いに離れてしまう。

奇妙なのは $\alpha \downarrow 0$ の極限、直径以下に近づくやいなや一定の斥力が働く場合の運動量の分配のされかたである [6]。図 36(b) に $\alpha = 1/10$ での数値計算の結果を示す。 $\alpha \gg 1$ の場合とは逆に、標的粒子のすべてに等しく運動量が分配され、しかも互いにちょうど接触する状態を維持する。Galilei の相対性により、入射粒子と標的粒子の立場をいれかえてもよく、また一般化して、ちょうど接触する n_1 個の標的粒子に、ちょうど接触する n_2 個の入射粒子をぶつけても、グループ内のちょうど接触状態を維持したままで、 n_1 単位の質量と n_2 単位の質量の間の 2 体衝突が起こる。

図 36(b) を例にとって衝突に際して何が起こるかを考えてみる。

- 入射粒子 x_1 は左端の標的粒子 x_2 と重複すると斥力によって運動量を後者に与える。
- この粒子 x_2 はそれを貯える間もなく右隣の粒子 x_3 と重複する。なぜなら加速はちょうど接触の条件を破るから。
- この重複が起こった途端、粒子 x_2 は運動量の貯蔵（加速）をやめる。なぜなら左の粒子 x_1 と右の粒子 x_3 からの力が相殺するから。
- 他方でこの粒子 x_3 はそれを貯える間もなく右隣の粒子 x_4 と重複する。
- 後者 x_4 は加速されるやいなや左の粒子 x_3 との接触が切れて運動量の貯蔵をやめる。
- 右側に隙間の生じた粒子 x_3 は再び右に加速され、左の x_2 との接触が切れる。
- 粒子 x_2 は入射粒子との重複がある限り、上記 2 段目に戻って同様の動きを繰り返す。

ポイントは極限 $\alpha \downarrow 0$ ではこれらの一連のプロセスのサイクルが標的粒子同士のあいだに無限小の隙間と速度差しかもたらさないことで、それによって標的粒子グループのちょうど接触状態は事実上維持される。そうして上のサイクルがぐるぐる回る間に入射粒子は標的粒子 x_2 との重複

(これは有限)を通して運動量を移送しつつ、最後に離れて行く。上述のサイクルは対流性の運動量流と伝導性の運動量流の相互転換が輻輳し、まとめて運動量の流れと見るのがわかりやすいのではないだろうか。

5 おわりに

個人的には複数の角度からものを見るのは気に入っているのでこのような試みをおこなったが、運動量の流れなどで奇を衒わなくても応力で間に合っている、というむきには特に押し付けたいとは思わない。電気回路を電流抜きで議論したい人もいてよいと思う。

ともあれ本稿でいいかかったのは、力と違って運動量はその保存性のおかげで「途中は適当に流しておいて、見たい所や見やすい時点でだけ観測する」ことができるということだ。今までにどこかで「力が伝わる」という表現をしたり出会ったりされた際になんとか後ろめたい気がしておられたなら、運動量が流れるという見方の素直さが通じるのではないかと思う。

本稿で論じなかったことや、不十分にしか論じられなかったと思っていることは多い。もしこの先に広がりがあるとしたら、ご興味を持たれた方のご貢献に期待する。

1. まず体系としては、今井氏のなされた運動量の見方による電磁気学やその相対論との融合ができていない。場の運動量を使わず、なおかつ Lorentz 力などの効果を運動量の流れで議論できるのだろうか。運動量の流れの見方がマイクロ尺度・量子系にどうつながるかの言及も皆無である。古典力学が原子の安定性を説明できないのは運動量流束をもちこんだとして変らないが、その事情を十分理解していないせいか冒頭のニュートン力学の書き直しも不透明感がぬぐえない。
2. 曲げや振りの運動量流束をつかった取り扱いが不十分である。[3] などの議論は特定の形状の棒や面の曲げに特化されているが、モーメントを運動量流の循環とみることで膜やバルクの現象にも敷衍できないか。たとえば薄い弾性板をたわめて円筒をつくると、§§ 4.1.2 のゼロサム則の議論が使えて任意角度での断面を横切る全運動量はゼロになるのだが、ここで相殺するのは対流性と伝導性の運動量ではなく、板面の外側の流れ（張力に対応）と内側の流れ（圧縮力に対応）の2重層である。これは運動量流束の渦層でもある。モーメントや角運動量といった参照点を要する量を局所的な要素に分解できるのだろうか。ヘビの這行（しゃこう）の力学を解析すると体内で作る曲げモーメントが変る場所で外に力を加えているらしい⁴⁸。だとすると、棒への外力が曲げモーメントの勾配を作る、という受動的な弾性論の逆を実現しているようで興味がある。
3. 対流性運動量と伝導性運動量の相互転換という視点での展開が不十分である。金槌で釘を打つのに、手の力で打つなら槌の質量は要らない。予め槌の重りに運動量を貯えて、それを一

⁴⁸ これは小林亮氏（広島大）らの CREST チームの方からの聞きかじり。曲解しているかもしれない。

気に釘に注ぎ込むのが効率よい打ち方だろう。ボクシングでよく効くパンチはインパクトの瞬間の姿勢が大事なしい。ピアノなどの打鍵も底を打つ瞬間の運動量の通り方を制御しているのではないか。武道研究家の甲野善紀氏の介護動作の研究においては、筋力で持ち上げようとして腰を傷めないよう、いったん対流性の運動量に貯えてから放出という方法が一部使われているように思える。これら人間尺度の現象に限らず、粉粒体の運動や天体系の運動など、運動量の流れの見方は思考の助けになるだろうか。

最後に個人的な興味として、運動量の流れの階層性について少し述べたい。エネルギー保存に關して荒っぽく言うなら、熱力学構造という体系が適用される場合には仕事とエネルギー変化の欠損分として熱があり、操作できる尺度に応じた熱や熱力学ポテンシャルの階層性が考えられる [7]。運動量保存に關してはこれに相当するような体系はあるのだろうか。内部 [残留] 応力は運動量流束の循環が閉じる尺度より粗く見ると無に等しい。熟した果物は内圧と果皮の張力の拮抗を保っているが、果物を積むときには一切考慮しない。イオン結晶の正負イオンの相互作用がおりなす運動量循環も原子尺度より上では見えない。仕事と熱が転換できる場合があるように、小さな尺度の運動量循環が上の階層に顕在化したりその逆ということもあるようだ。それらの事例を見ると、階層移行には平衡から遠い過程/操作を要するようにみえる [8]。降伏限界を超えて変形させると反対方向への変形の降伏限界が下るという Bauschinger 効果は、運動量循環を 3 つの弾塑性要素のフラストレーションで実現する簡単なモデルで説明できる [9]。ガラス状態で引き延ばされたゴムは除荷後にも（構成方程式の表す）様々な緩和モードの間に内部応力/運動量循環をため込み、再加熱の時点でマクロな運動量流に転換する（メモリー効果） [10]。運動量の尺度移行に何か第 2 法則的な限界やその他の rule of thumb はあるのだろうか。

わかっているようでわからない運動量である。

参考文献

- [1] 今井功「電磁気学を考える」（サイエンス社、1990 年）
- [2] 今井功「新感覚物理入門 — 力学・電磁気学の新しい考え方」（岩波書店、2003 年）
- [3] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Theory of Elasticity* (3rd ed. Butterworth-Heinemann, 1986) §19, The equation of equilibrium of rods.
- [4] Ken Sekimoto, *Physica D* **205** (2005), 242.
- [5] K. L. Johnson, *Contact Mechanics* (Cambridge Univ. Press, 1987).
- [6] K. Sekimoto, *Phys. Rev. Lett.* **104** (2010), 124302.
- [7] K. Sekimoto, *Stochastic Energetics* (Lecture Notes in Physics, **799**) Springer, 2010.

- [8] K. Sekimoto, *Internal stress as a link between macroscopic and mesoscopic mechanics*, in “Chemomechanical Instabilities in Responsive Materials”, (Springer Science+Business Media), (2009) 241.
- [9] T. Ooshida and K. Sekimoto, <http://arxiv.org/pdf/cond-mat/0410306v1>. (掲載版 *ibid. Phys. Rev. Lett.* **95** 2005, 108301 では Bauschinger 効果の部分を削った。)
- [10] Y. Miyamoto, K. Fukao, H. Yamao, and K. Sekimoto, *Phys. Rev. Lett.* **88** (2002), 225504.